ACUSTICA

Vol. 8 1958 No. 2

SOUND PROPAGATION IN PLATES AND RODS OF RUBBER-ELASTIC MATERIALS

by H. J. Naake and K. Tamm

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

Summary

The known results for the propagation of sound in plates with Poisson's constant $\sigma = 0.5$ (liquids) and $\sigma = 0.35$ (aluminium) are completed by dispersion curves with $\sigma = 0.47$ (rubber). The dispersion curves are easily understandable because of the large difference between the velocities of transverse and longitudinal waves occurring at this value of σ.

Measurements of the propagation of elastic waves in rods of rubber with square cross-section in the frequency range 0.1 to 300 kc/s are reported. The amplitude is measured as a function of distance by partly submerging the rod into a waterfilled vessel within which a hydrophone is arranged.

The results with respect to phase velocity and attenuation can be explained in terms of the propagation of extensional waves at low frequencies and compressional waves at high frequencies separated by a range with high attenuation.

Zusammenfassung

Die bekannten Ergebnisse für die Schallausbreitung in Platten mit einer Poissonschen Konstante von $\sigma = 0{,}5$ (Flüssigkeiten) und $\sigma = 0{,}35$ (Aluminium) werden durch die Dispersionskurven für $\sigma = 0{,}47$ ergänzt. Durch den großen Unterschied zwischen Transversal- und Longitudinalwellengeschwindigkeit, der bei diesem Wert der Poissonschen Konstante auftritt, werden die Dispersionsverhältnisse übersichtlicher.

Weiterhin wird über Messungen der Schallausbreitung in Gummistäben mit quadratischem Querschnitt im Frequenzbereich von 0,1 bis 300 kHz berichtet. Die Schwingungsamplitude längs des Stabes wird dadurch ermittelt, daß dieser allmählich in ein wassergefülltes Gefäß eingetaucht wird, in dem sich ein feststehendes Wasserschallmikrophon befindet.

Die Meßergebnisse für Phasengeschwindigkeit und Dämpfung lassen sich durch das Auftreten von Dehnwellen bei tiefen und von Kompressionswellen bei hohen Frequenzen erklären. Die Übertragungsbereiche sind durch einen Frequenzbereich hoher Dämpfung voneinander getrennt.

Sommaire

Les résultats connus concernant la propagation du son dans des plaques ayant un coefficient de Poisson $\sigma = 0{,}5$ (liquides) et $\sigma = 0{,}35$ (aluminium) ont été complétés par les courbes de dispersion relatives au cas $\sigma = 0{,}47$. Les caractéristiques de dispersion sont bien mises en évidence du fait de la grande différence qui existe, pour cette valeur du coefficient de Poisson, entre les vitesses des ondes transversales et longitudinales.

On a également mesuré la propagation du son dans des barreaux de caoutchouc de section carrée, dans la gamme de fréquences 0,1 à 300 kHz. On a déterminé l'amplitude vibratoire le long du barreau en le plongeant peu à peu dans un récipient rempli d'eau, et où se trouvait un microphone fixe.

Les résultats des mesures de la vitesse de phase et de l'amortissement peuvent s'expliquer par l'apparition d'ondes d'allongement aux basses fréquences et d'ondes de compression aux fréquences élevées. Les domaines de transmission sont séparés par une gamme de fréquences où l'amortissement est plus grand.

1. Introduction

The propagation of elastic waves in plates and rods has very often been investigated theoretically and experimentally. In these investigations the main interest was either in the determination of the elastic constants of the material of the sample, or in finding the influence of the geometrical dimensions of the plate or rod respectively on the sound propagation within it. In the first case care must be taken to obtain a simple relation between the propagation constants and the elastic constants of the material. For instance from velocity and damping of extensional or flexural waves in thin plates and rods (wave length at least 6 times as large as the thickness of the plate or the linear dimensions of the cross-section of the rod resp.), Young's modulus and its loss tangent can be calculated by means of simple formulas.

Measurements and calculations of the propagation of elastic waves in plates and rods, aimed at investigating the influence of geometry, have been made up to now only with metal plates and metal rods with rectangular, square or circular cross-sections [1], [2], [5], [6], [7]. The use of metal for the investigations has two substantial advantages: 1st their loss tangent is very small (mostly smaller than 10^{-3}) and therewith allows a very exact determination of resonant frequencies. 2nd their elastic properties are mostly independent of frequency and therewith the velocities of the pure transverse and the pure longitudinal wave also. In this case the phase velocity of a certain type of wave in samples of equal shape of cross-section is a function of the ratio d/λ alone, where d means a linear dimension of the cross-section, e. g. the diameter in the case of cylindrical rods or the plate thickness respectively, and λ the wave length.

These advantages are absent when measurements are made with materials having large loss tangents and elastic properties which alter with frequency. Such materials are, for example, rubber-elastic materials such as soft rubber and numerous plastics. Measurements of the sound propagation in such materials are reported in many publications too, but there the interest was nearly exclusively directed towards the determination of the elastic constants. The present paper mainly deals with the influence of the geometry of the samples on the propagation of elastic waves. When compared with the conditions in metals substantial differences are given – in addition to the frequency dependence of the elastic constants and the large loss tangents already mentioned – also by the fact that the numerical values of Lamé's constants λ^* and μ differ by several orders of magnitude from each other (for soft rubber $\lambda^*/\mu \approx 4000$, while for aluminium $\lambda^*/\mu = 2.3$). The corresponding loss tangents moreover largely differ from each other, and always $\eta_\lambda < \eta_\mu$.

The damping of elastic waves in general is determined by both these loss tangents η_λ and η_μ. For some simple cases (extensional wave, plane shear and longitudinal waves) their influence may be expressed by a loss tangent of the experimentally determined elastic constants as e. g. Young's modulus and "sound stiffness" as discussed in details by Skudrzyk ([8], p. 771).

2. Theoretical considerations on wave propagation in plates

For the determination of the propagation of elastic waves in solid plates of infinite extension, the assumption of obliquely propagating wave fronts has proved very suitable. This model yields exact results for propagation in isotropic media with negligible losses. The latter fact, of course, cannot be assumed in our experiments but in spite of that, this method may be mentioned here. A detailed representation has been given e. g. by Schoch [6].

The conditions are simplest when the considerations are first made for a medium without shear tensions ($\mu = 0$) e. g. for a liquid [9]. The boundary conditions, demanding vanishing sound pressure at the two plane surface – having a distance d from each other which is equal to the thickness of the plate – lead to the following equation for the angle ϑ between the plate-normal and the wave-normals of the two symmetrically incident waves:

$$\sin\left(\frac{k\,d}{2}\cos\vartheta\right)\cos\left(\frac{k\,d}{2}\sin\vartheta\right) = 0$$

with the solutions

$$\cos\vartheta_n = \frac{n\,\pi}{k\,d} \quad \text{for} \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots .$$

From the angle of incidence of the obliquely propagating waves we immediately get the trace velocity of the waves which means the phase velocity of the "plate-wave" along the surfaces

$$v = c/\sin\vartheta_n = c\Bigg/\sqrt{1-\left(\frac{n\,\pi}{k\,d}\right)^2},$$

where c is the velocity of the longitudinal waves, and k their wave number. For the phase velocities of the different types of waves we thus get the hyperbolas represented in Fig. 1.

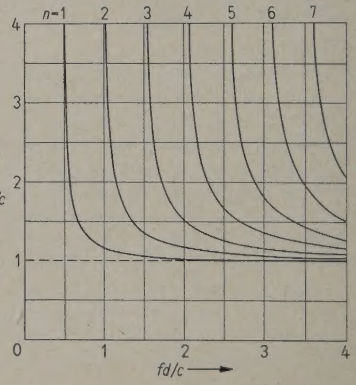


Fig. 1. Phase velocity v of free waves in a "plate" without shear tension ($\mu = 0$) (according to Tamm [9]); c sound velocity, f frequency, d thickness of the "plate".

The result can be easily understood since the crossing waves form a standing wave pattern in the direction normal to the plane of symmetry, so that the boundary condition of vanishing pressure is fulfilled periodically in parallel planes, the distances between which are given by the angle of incidence. Vice versa the distance between these planes which is given by the thickness of the plate, determines the discrete angles of incidence and therewith also the trace velocity (phase velocity of the "plate-wave"). For parallel incidence (corresponding to infinite plate thickness) the latter is equal to that of the longitudinal wave, while it is infinite for the case of normal incidence (corresponding to a thickness equal to half a wave length) this means displacements with equal phase along the direction of propagation. The course of the phase velocity between these limiting cases is given by the hyperbola already mentioned above. The limit of infinite phase velocity determines a minimum thickness of the plates or cut-off frequency respectively below which no progressive wave can occur but only displacements with equal phase decreasing exponentially with distance. This "suppression"-attenuation given thereby increases with decreasing thickness or decreasing frequency respectively. The wave form can be described by a superposition of two plane waves with imaginary values of ϑ_n. Waves with phase velocities smaller than that of the longitudinal waves are not present.

The equation for the phase velocity can be written in a form which is well suited for checking the experimental results. If the limiting frequency f_n and the corresponding wave number k_n of the wave type n is introduced by the condition

$$\frac{n\pi}{k_n d} = 1 \quad \text{i. e.} \quad f_n = \frac{n c}{2 d}$$

we get $$v = c/\sqrt{1 - (f_n/f)^2}$$

or after some transformation

$$1/\lambda^2 = 1/c^2 \cdot (f^2 - f_n^2).$$

This is the equation of a straight line with the slope $1/c^2$, if the square of the measuring frequency is plotted along the abscissa and the reciprocal of the square of the experimentally determined wave lengths along the ordinate. The relation also holds for propagation in rods with arbitrary cross-sections. The measurements made with rods of rubber which are described later, have been evaluated according to this method.

In infinitely extended media capable of bearing shear forces two types of waves can occur which propagate independently from each other in the case of small amplitudes: the transverse wave (shear wave) with the phase velocity

$$c_T = \sqrt{\mu/\varrho} \quad (\varrho \text{ density of the medium})$$

and the longitudinal wave with the phase velocity

$$c_L = \sqrt{(\lambda^* + 2\mu)/\varrho}.$$

While in infinite media both types of waves occur independently, the boundary conditions at plane surfaces (vanishing stress- and shear-tensions) can be fulfilled only by superposition of both types. If a plane wave of one type hits the surface, in addition to the reflected wave of the same type (angle of incidence equal to angle of reflection) a reflected wave of the other type is observed, the angle of reflection of which is given by the condition of equal phase velocity along the boundary surface. Besides the angle of reflection, amplitude and phase of the additional wave are also determined by the boundary conditions. In addition further heterogeneous waves (Rayleigh's surface waves) occur near the boundaries.

If now the propagation in plates (of thickness d) is considered, the boundary conditions have to be fulfilled at two opposite boundary surfaces as in the case of the medium without shear tensions. Using the abbreviations

$$q = (c_T/c_L)^2 \quad \text{and} \quad s = (c_T/v)^2 = \sin^2\beta,$$

this yields [6] the two equations

for symmetrical modes:

$$\frac{\tan\dfrac{\omega d}{2 c_T}\sqrt{1-s}}{\tan\dfrac{\omega d}{2 c_T}\sqrt{q-s}} = -\frac{4 s\sqrt{1-s}\,\sqrt{q-s}}{(1-2s)^2},$$

for antisymmetrical modes:

$$\frac{\tan\dfrac{\omega d}{2 c_T}\sqrt{q-s}}{\tan\dfrac{\omega d}{2 c_T}\sqrt{1-s}} = -\frac{4 s\sqrt{1-s}\,\sqrt{q-s}}{(1-2s)^2},$$

where β is the angle between plate normal and direction of propagation (i. e. the angle of incidence) of the transverse waves.

The roots of the equations thus determine the phase velocities

$$v = c_T/\sqrt{s} = c_T/\sin\beta$$

of the different kinds of plate waves, if the properties of the material and the thickness of the plate are given.

An evaluation of the equations can only be made numerically which has been done for example by Firestone [1] for aluminium plates with $\sigma = 0.35$ (see Fig. 2). The results have been stated by Schoch [7] with measurements of the transmission of sound through plates. Since the nodal planes of the stress (or pressure) distribution of the two fundamental types forming the plate wave are no longer (as those of the "compressional" wave in the case of a liquid) situated on the boundary surfaces (for this purpose each type of wave ought to fulfil the boundary conditions separately), the thickness of the plate no longer corresponds to half a period of a sinusoidal pressure distribution or a multiple of it.

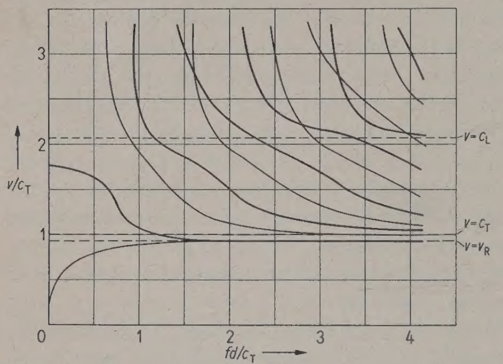


Fig. 2. Phase velocity v of free waves in solid plates with a Poisson's number $\sigma = 0.35$ (according to Firestone [1]); c_T velocity of transverse waves, f frequency, d thickness of the plate.

The course of the phase velocity therewith deviates from the hyperbola. Only for the case of normal incidence can the boundary conditions be fulfilled for each type of wave separately, so that the cut-off frequencies of the longitudinal waves are unaltered and harmonic. They are completed by corresponding cut-off frequencies of the shear waves. As a whole we get the wellknown rather complicated picture of the dispersion curves which is shown in Fig. 2. It may be mentioned that here also waves with phase velocities can occur which are smaller than those of the longitudinal waves. These waves are superpositions of plane shear waves and inhomogeneous longitudinal waves. The lower limit for the phase velocity of superpositions of this type is the velocity of the shear waves. A difference from the medium without shear tensions is given by the occurrence of extensional and flexural waves i. e. of waves without cut-off frequency, the phase velocity of which depends only to a small extent on the dilatational stiffness λ^*. It runs from a value somewhat higher than the velocity of the shear waves or zero resp. to that of the Rayleigh waves; the latter being smaller than the velocity of the shear waves means that in this case the shear wave component, too, is inhomogeneous.

3. Waves in rubber-elastic materials

In the present paper the equations have been evaluated for the value $\sigma = 0.47$ for Poisson's number[1]. The resulting picture (see Fig. 3) is much clearer than that for metals with a Poisson's number of $\sigma = 0.35$. This is due to the fact that the lowest limiting frequency calculated from the shear-wave-velocity is much lower than that from the longitudinal-wave-velocity. The course of the phase velocity of the different types of waves may be understood as follows. Below the lowest "longitudinal-wave-limiting-frequency" the compressibility of the material is of low influence, so that the phase velocity is determined almost exclusively by the shear modulus. The shear modulus on the other hand is so small that above this limiting frequency the waves excited scarcely deviate from the longitudinal waves in plates without shear tensions though, of course, the waves are superpositions of longitudinal and shear waves. Only for values of d/λ for which large amplitudes of the shear waves are necessary to fulfil the boundary conditions (thickness-resonance) do the waves behave with respect to the phase velocity like pure shear waves in an incompressible medium. This alternating influence of longitudinal and transversal components produces the steplike course of the phase velocity.

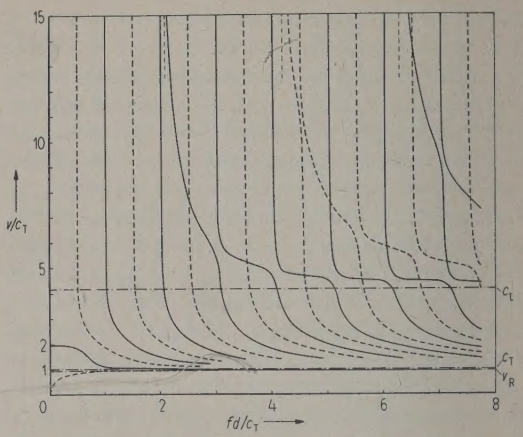


Fig. 3. Phase velocity v of free waves in solid plates with a Poisson's number of $\sigma = 0.47$; c_T velocity of transverse waves, c_L velocity of longitudinal waves, c_R velocity of Rayleigh's surface waves.

Above the limiting frequency of the longitudinal waves, a phase velocity largely fluctuating with frequency should be expected. Experience, however, shows, that the large number of dispersions is not found experimentally. This is obviously due to the attenuation which increases so much near the dispersion frequencies that the corresponding wave types are damped out and cannot be measured. The increase of attenuation is caused by the higher energy losses of the shear component which here overcomes the longitudinal one. Apart from these small regions the attenuation is determined by the loss factor of the longitudinal waves.

---

[1] The numerical calculations have been made by cand. phys. Gruber.

While in plane waves a constant loss tangent means constant energy loss per wave length, the attenuation of the plate waves increases with phase velocity. The reason, of course, is that, corresponding to the reduced group velocity, the energy is propagated more slowly, so that the energy loss per period, given by the loss tangent, is effective within a smaller distance so that the energy decreases more rapidly with distance. This process can be understood also from the picture of the superimposed obliquely propagating waves, if we take into consideration that the boundary conditions cannot be fulfilled with plane damped waves, but that additional inhomogeneous waves of the kind of the surface waves are necessary which are described mathematically by complex angles of incidence. Physically this process also can be taken as the increased attenuation in the vicinity of a transverse resonance. In the case of the plate without shear tensions we therewith are able to determine the loss tangent in a simple way also from the values of the attenuation in regions of strong dispersion near the limiting frequency. The influence of the loss tangent can be easily seen in those cases when the propagation process is determined by one of the two wave types only. Phase velocity and attenuation of the extensional wave are given by Young's modulus and its loss tangent. These two values are composed (s. Skudrzyk [8], p. 771) in a simple way by Lamé's constants (λ^* and μ) and their loss tangents. For soft plastics ($\sigma \approx 0.5$) Young's modulus is mainly determined by the shear modulus (μ) and its loss tangent is practically equal to that of the shear modulus.

If on the other hand both types of waves participate to more or less the same extent in the formation of the wave mode, the attenuation is determined in a rather complicated way by both the loss tangents. For the calculation of the attenuation in the most general case it is necessary to calculate the distribution of the potential energy of the compressions and the distortions separately and to determine the energy losses from the corresponding loss tangents. This calculation has not been made in detail up to now.

4. Measuring apparatus

Contrary to the calculations which could be made exactly only for the case of plates, the measurements have been made with rods of square cross-section, which is much easier than with plates. It is difficult to excite plates at one of their edges with uniform amplitude and phase along this edge. An excitation of this kind was realized by Kuhl and Meyer ([3], chap. III) by exciting a U-profile iron in its lowest cross-sectional resonance. In this resonance both sides of the cross section vibrate with opposite phase while the central part is exposed to bending moments. For the measurements, a strip of rubber which was so wide that it could be looked upon as an infinite plate was fixed with one of its edges at one side of the profile iron, the latter being excited to the mentioned resonance vibration. This method, however, only allowed measurements at single frequencies, while in the present work a very large frequency range (0.1 to 300 kc/s) should be investigated.

Fortunately the experimental results with rods may be compared with the theoretical results for plates at least qualitatively, because it is known from calculations for rods of circular cross-section which can be and have been made exactly ([2], [5]) that here the dispersional behaviour of the different wave types qualitatively agrees with that in a plate.

The apparatus which was used in the frequency range 1 to 300 kc/s is very similar to that used by Kuhl and Meyer. The scheme is given in Fig. 4. The excitation of the rubber rods to vibrations in longitudinal direction was made from one end. For this purpose the rods were connected at their front surfaces with an aluminium block, having the same cross-section and about 2 cm length. The aluminium block was fixed on a transmitter for structure borne sound. In the range 3 to 300 kc/s a piezo-electric system was used as a transmitter, which mainly consisted of a block of Rochelle salt plates. In the frequency range below 3 kc/s the amplitudes of this system were too small to get a sufficient excitation, so that here a moving coil transmitter was used, the

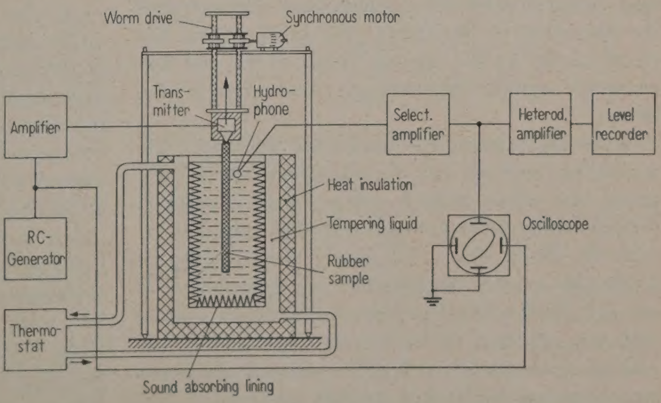


Fig. 4. Scheme of the apparatus for phase velocity and damping measurements.

coil of which bore a conical coupling mass of aluminium.

To reduce the radiation of air-borne sound, both systems had to be surrounded by thick-walled capsules of aluminium. The space between capsules and systems was filled with sound absorbing materials. The systems were supplied by an RC-generator with power amplifier with an output power of 80 watts for frequencies below 20 kc/s and 15 watts above 20 kc/s available.

To pick up the vibrations of the rod it was plunged slowly into (or drawn out of) a water-filled vessel, 40 cm in depth, within which a hydrophone was arranged. If now the rod is excited to elastic vibrations from its upper end an elastic wave travels a varying distance along the rod where it is attenuated by the losses of the material, so that its vibration amplitude at the surface of the water is altered correspondingly. The part of the rod under water now radiates sound energy into the water by its contraction and at the place of the hydrophone a sound pressure is generated which is linearly composed of the sound waves coming directly from the rod and those reflected from the surface and the walls of the vessel. This sound pressure is therefore proportional to the vibration amplitude at any point of sound field e. g. the cross section of the rod at the surface of the water, if the sound distribution in the rod and in the water volume does not alter during the motion of the rod. This is fulfilled if the lower front side of the rod does not radiate sound. The attenuation in the rod therefore must be so large that no measurable sound energy reaches the lower end of it. Moreover the rod must not move in a transverse direction and the conditions of propagation within the vessel must not be altered by the differences in the depth of immersion of the rod. For this purpose all walls of the vessel were lined with a sound absorbing layer of the "Fafnir"-type (described by MEYER and TAMM [4]) so that the alteration of the sound absorption within the vessel caused by the varying length of the rod was negligible against the constant absorption of the lining.

With the mentioned conditions fulfilled, this measuring method has the advantage when compared with other methods using vibration pick-ups brought into direct contact with the specimen at different places, that a completely uniform and reproducible contact between bar and microphone is secured. With vibration pick-ups in direct contact with the specimen, it is difficult, especially in the case of measurements at high frequencies and phase measurements, to get reproducible conditions.

The measuring vessel filled with water was surrounded by another vessel filled with a liquid of controlled temperature so that measurements could be made under constant conditions. For all measurements the water temperature was kept constant at 20° C. Thus the specimen, too, had a temperature of 20° C, since it was taken off the water only for a short time and since its temperature altered only very slowly if the room temperature differed from 20° C. Fig. 5 shows a photograph of the measuring vessel with the rod of rubber, the exciting system and the driving mechanism for the movements of the rod.

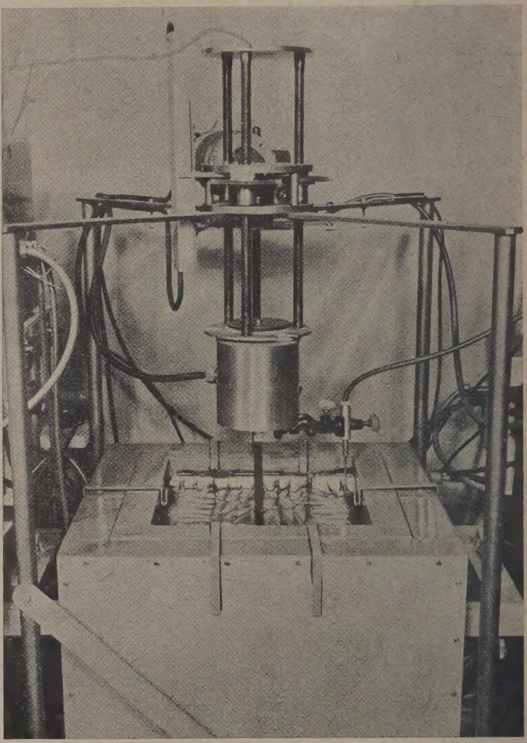


Fig. 5. View of the measuring vessel.

The output voltage of the hydrophone was amplified by means of a resonance amplifier and a heterodyne amplifier and recorded by means of a level recorder. A high selectivity of the receiving set is necessary to suppress the harmonics produced especially by the piezo-electric transmitter, which are disturbing when the attenuation within the rubber rod is large for the basic frequency and small for its harmonics. Moreover the vertical amplifier of an oscilloscope is connected with the resonance amplifier, while the voltage of the RC-generator is given to the horizontal plates, thus allowing measurements of the phase shift between transmitter and receiver voltage and measurements of the wave length on the bar when the latter is moved. The rubber bar together with the transmitter is moved vertically (velocity 0.2 or 0.4 mm/s) by means of a worm drive coupled to a synchronous motor. The decrease of the amplitude on the bar occurs exponentially so that the level recorder records – on a logarithmic scale – a straight line from the slope of which and the transport velocity of the paper (0.01 to 1 mm/s) the attenuation (dB/cm) can be determined.

As already mentioned, this procedure can no longer be applied when the attenuation within the rods becomes so small that a considerable part of the sound energy reaches its lower end and is reflected there or radiated into the liquid. With the special sorts of rubber investigated we thus got a lower frequency limit of about 1 kc/s. To extend the measuring range to frequencies below 1 kc/s some resonance measurements have been made in addition. The excitation of the rod which was supported by two stretched steel wires was made without mechanical contact by means of an electromagnetic system acting on a small iron plate fixed at the front of the bar so that the latter was excited to vibrations in longitudinal direction. The vibrations were detected electrostatically by using the other end of the bar, which had been made conductive, as the moving electrode of a condenser microphone. The measurements were made by continuously altering the frequency of excitation and recording the amplitude with a level recorder, the resulting resonance curves being evaluated with respect to resonant frequency and half energy width. The lowest resonant frequency for extensional waves of the rod, 30 cm in length, was 70 c/s in the case of the softest rubber type.

Because of the relatively high loss tangent of the extensional waves used in this experiment ($\eta \approx 0.1$) the additional losses caused by the support of the rod and the radiation of airborne sound do not need consideration.

5. Experimental results

The final experiments were made with five different types of rubber[2]. Of these types, two were based on synthetic and three on natural rubber each type having a different degree of hardness which has been given in terms of DVM-hardness[3]. The types of synthetic rubber (Neoprene) investigated had the DVM-numbers 25 and 65 and the natural rubber the numbers 25, 65 and 95. Of each type one rod of 5×5 and another of 10×10 mm^2 cross-section were measured, their length being about 30 cm. Typical examples for the experimental results with respect to attenuation and phase velocity are given in Fig. 6. Figs. 6 a and 6 b show the results found with a hard type of rubber, Figs. 6 c and 6 d with a soft type.

We found out that for all types of rubber investigated, the whole frequency range of the experiments from 0.1 to 300 kc/s can be subdivided into four parts which differ from each other with respect to the courses of phase velocity and attenuation. The limits of these ranges depend on the type of rubber and on the cross-section of the rods.

1. The lowest part of the frequency range is characterized by attenuation and phase velocity being equal for both rods of different cross-section of each type of rubber within the limits of measuring accuracy. The attenuation (measured in dB/cm) increases linearly of somewhat more than linearly with frequency. The phase velocity remains constant or shows a slight increase with frequency. We here have „genuine" extensional waves, the wave length being at least 6 times as large as the diameter of the rod. Within this frequency range we can determine from the experimental values of attenuation and wave length a loss tangent which is characteristic for the material. We also can use the experimental values of the phase velocity to determine Young's modulus.

Since the loss tangent is comparatively large, the usual approximation formulas cannot be used for calculating it from the attenuation, but an exact relation must be applied derived from the solution of the wave equation for a damped wave propagating in the x-direction in a medium with a complex modulus (called "Sound Stiffness") $D(1+\mathrm{i}\,\eta)$

$$A(x,t) = A_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta-\mathrm{i}\,\alpha)x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} =$$

$$= A_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\sqrt{\varrho/D(1+\mathrm{i}\eta)}\,x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,.$$

For arbitrary values of η we then get the attenuation per wave length

$$\alpha\lambda = 2\pi\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{\eta}; \quad \frac{\alpha\lambda}{\mathrm{dB}} = 8{,}68\cdot 2\pi\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{\eta}.$$

This relation holds for all types of waves the phase velocity of which is proportional to the square root of an elastic modulus, e. g. for extensional waves and for longitudinal waves, but not for the calculation of the loss tangent from the attenuation of flexural waves. The relation given by this formula is represented in Fig. 7. For small loss tangents

---

[2] The samples were placed at our disposal by the firm Continental-Werke A.G., Hannover, which we gratefully acknowledge.

[3] DVM-hardness is a measure which is used in addition to the Shore-hardness to characterize the elasticity of rubber and plastics. It is determined by means of a metal sphere, 10 mm in diameter, which is pressed on to a plate of 6 mm thickness of the material investigated on a rigid foundation, first with a weight of 50 g and then with an additional weight of 1000 g. The difference between the depths of penetration measured in hundredths of a millimeter gives the DVM-number. Thus the softer material has the larger DVM-number.

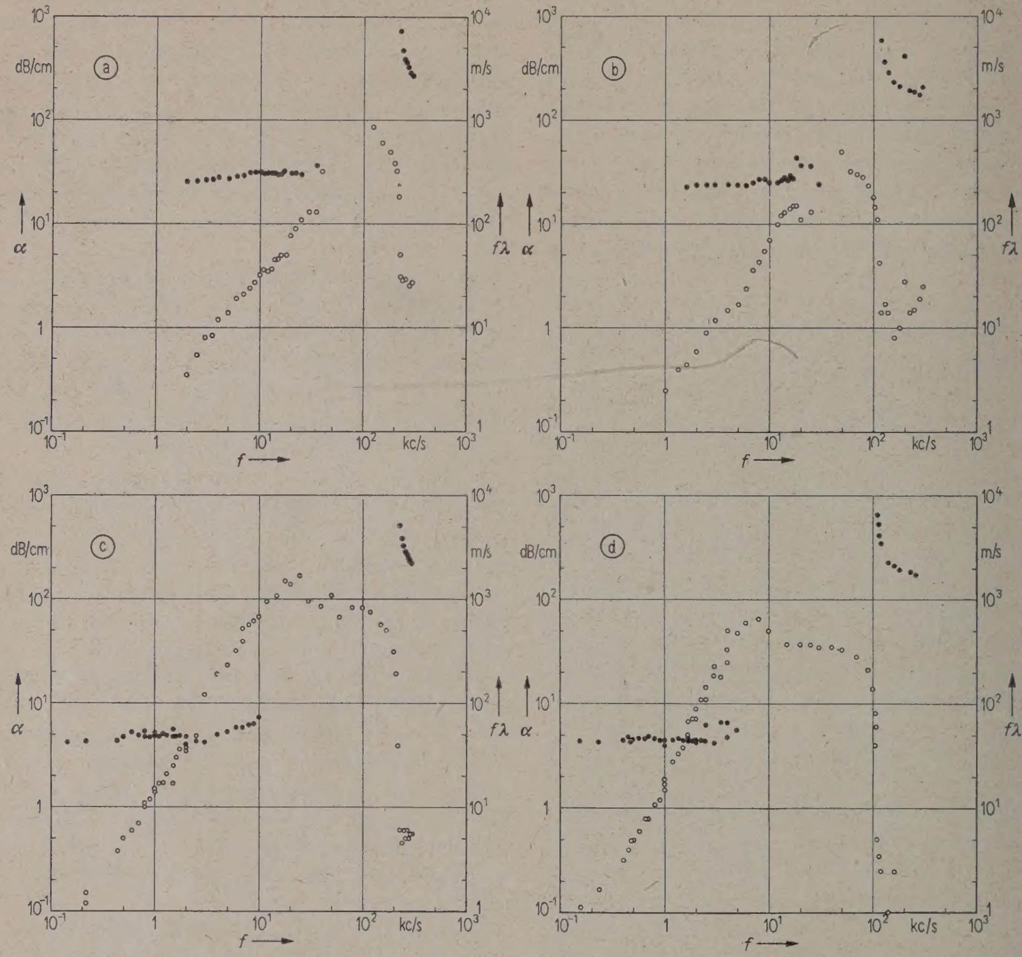


Fig. 6. Phase velocity and damping of elastic waves in bars of two types of natural rubber for two different cross-sections; ●●● phase velocity $f\lambda$, ○○○ damping α,
(a) 5 × 5 mm², hardness 25 DVM,
(b) 10 × 10 mm², hardness 25 DVM,
(c) 5 × 5 mm², hardness 95 DVM,
(d) 10 × 10 mm², hardness 95 DVM.

($\eta^2 \ll 1$) we get the approximation

$$\frac{\alpha\,\lambda}{\mathrm{dB}} = 27{,}3\;\eta\,.$$

With large loss tangents also the simple relation between frequency, wave length and phase velocity $c = f\lambda$ is no longer valid. From the equation for a damped wave propagating in the x-direction we get with λ defined by $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\lambda} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$:

$$c = \lambda f \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}+1}{2\,(1+\eta^2)}}\,.$$

This relation too is represented in Fig. 7.

2. For higher frequencies, i. e. smaller wave lengths, we may still use the term extensional waves, but here the geometry of the rod has a large effect

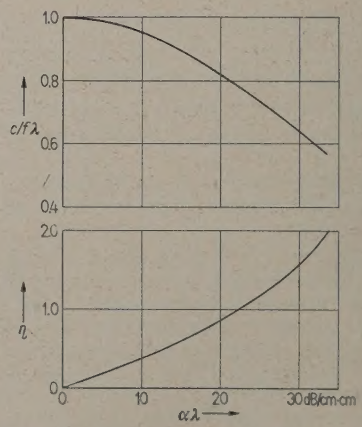


Fig. 7. Loss factor η and ratio $c/f\lambda$ as function of the attenuation per wave length.

on the measured attenuation of propagation and the latter therefore no longer depends exclusively on the material of the rod. Here the calculation of a loss tangent is fruitless and therefore the product $\alpha \lambda$ was plotted as a function of frequency. Some experimental results for different types of rubber and for two different cross-sections are given in Fig. 8. The plotting extends also over the frequency range (1) showing there a good agreement of the $\alpha \lambda$-values for both cross-sections. At a ratio of $\lambda/d \approx 5$ (for the larger cross-section), the experimental results for rods of different cross-sections deviate from each other. Both of them show linear increases but with different slopes, the rod with the larger cross-section having the steeper one. The experimental results have been plotted as far as a finite wave length could be determined, the knowledge of which is necessary for the calculation of $\alpha \lambda$. The corresponding frequency gives the upper limit of the frequency range (2).

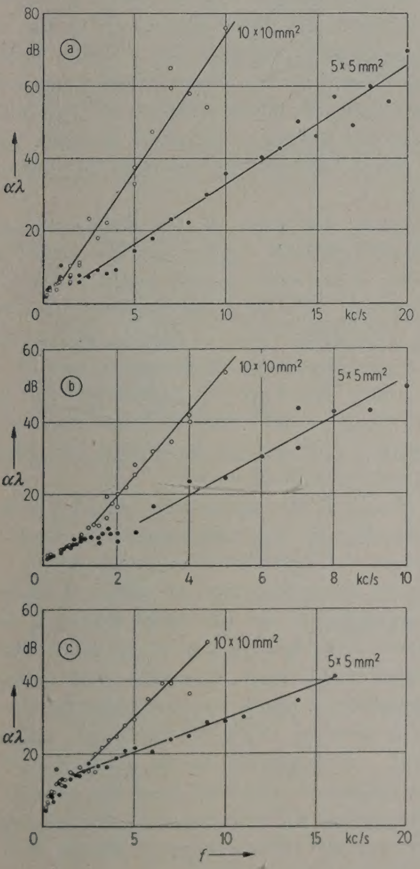


Fig. 8. Damping in bars of soft rubber of two different cross-sections.
(a) Natural rubber, hardness 65 DVM,
(b) Natural rubber, hardness 95 DVM,
(c) Neoprene, hardness 65 DVM.

As can be seen from a comparison between the magnitudes of the pure material damping in the frequency range (1) and the damping additionally influenced by geometry in the frequency range (2), the latter is considerably higher. The linear increase of $\alpha \lambda$ with frequency seems worth mentioning and it would be of interest to find the reasons for this by means of theoretical considerations on the mechanism of the propagation of extensional waves in that frequency range within which the wave length is comparable with the diameter of the rod. Up to now, however, such considerations have not been made with success.

As well as the lower limit, the upper limit of this frequency range (2) not only depends on the cross-section but also on the hardness of the rubber rod. While for the rod $10 \times 10\ \text{mm}^2$ in cross-section with hardness 95 DVM finite phase velocity only can be measured up to 7 kc/s, finite phase velocities are observed in a rod with the hardness 25 DVM and the same cross-section up to 30 kc/s. This, of course, is a consequence of its larger phase velocity, i. e. longer wave length at the same frequency. The resulting ratio of the limiting frequencies (30 : 7) is not the same as the ratio of the phase velocities (300 : 25) because of the fact that the loss tangent of the harder rubber type is higher than that of the softer type. Therewith the constant "geometrically induced" attenuation of the "compressional wave" of the next frequency range (3) is only reached for higher values of d/λ. This type of wave then predominates because of its lower attenuation.

3. The frequency range (3) is characterized by the infinite phase velocity of the "compressional wave" which means that the rod vibrates in equal phase at any point. This is obvious from a comparison between Fig. 9 a and Fig. 9 b, which show the phase of the vibration along a distance of nearly 1 cm. Fig. 9 a shows the conditions for the extensional wave in the frequency range (2). In the immediate neighbourhood of the upper end of the

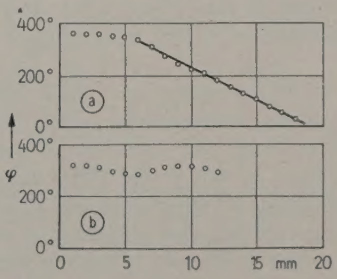


Fig. 9. Phase shift between transmitter and receiver voltage dependent on the transmitting length of the rod of rubber;
(a) frequency range (2),
(b) frequency range (3).

rod the transverse contraction is hindered because there the rod is connected to an aluminium block. Thus the phase velocity is increased here, but beginning at a distance of some millimetres, a constant value is observed which has been given as the result. Fig. 9 b holds for the "compressional wave" in the frequency range (3). There is no phase alteration along the small distance within which – because of the high attenuation – the vibration can be observed at all.

In the frequency range (3) the attenuation (measured in dB/cm) is nearly constant. Near the upper limit of this range, however, it decreases first slowly and then very steeply, the steep decrease being characteristic for the upper frequency limit of this frequency range. The same course is observed for the wattless attenuation when a liquid column with soft boundaries is excited to vibrations below its limiting frequency. This limiting frequency of a liquid column with square cross-section and without losses in the liquid and at the boundaries is given ([3], chap. VIII) by

$$f_{\mathrm{gr}} = \sqrt{2}\,\frac{c}{2\,d}$$

with d being the edge length of the cross-section and c the sound velocity in the free medium. Below the limiting frequency the value of attenuation is given by the formula

$$\alpha = \frac{2\,\pi f}{c_0}\sqrt{2\left(\frac{c_0}{2\,f\,d}\right)^2 - 1}\,,$$

$$\frac{\alpha}{\mathrm{dB}} = 8.69\,\frac{2\,\pi f}{c_0}\sqrt{2\left(\frac{c_0}{2\,f\,d}\right)^2 - 1}$$

and approximates to the constant value α_0 at very low frequencies:

$$\alpha_0 = \frac{\pi\sqrt{2}}{d}\,, \qquad \frac{\alpha_0}{\mathrm{dB}} = 8.69\,\frac{\pi\sqrt{2}}{d}\,.$$

This value does not depend on the properties of the liquid but only on the cross-section of the liquid column. If this limiting value α_0 is calculated for the rods of rubber as if they were columns of liquid we get

at 10×10 mm^2 cross-section: 38.5 dB/cm and
at 5×5 mm^2 cross-section: 77 dB/cm.

A comparison with the experimental results for those soft types of rubber for which the constant attenuation could be measured over a larger frequency range, shows that within this range the elastic properties of the rubber can very well be put equal to those of a liquid. The somewhat higher attenuation observed is at least partly due to the losses of the material. The experimental values found by Kuhl and Tamm ([3], chap. VIII) for water columns with soft boundaries also are somewhat higher than the calculated values in the range of the constant attenuation, which may be due to energy losses at the "sound-soft" walls.

As was stated in the last section, the lower limit of the frequency range (3) depends on the softness of the rubber for rods with a given cross-section. The upper limit on the other hand is given by the velocity of the longitudinal waves which is nearly independent of the softness of the material. We therefore get a frequency range (3) with infinite phase velocity and nearly constant attenuation which is the larger the softer the type of rubber.

4. In the frequency range (4) above the limiting frequency of the compressional wave once more a finite phase velocity can be measured and we find a dispersion curve which corresponds to that in a liquid and which begins with very large values of the phase velocity at the limiting frequency. This limiting frequency is about 210 kc/s for rods with 5×5 mm^2 cross-section and about 105 kc/s for the rods with 10×10 mm^2 cross-section, i. e. inversely proportional to the linear dimensions of the cross-section as is to be expected for a liquid. With increasing frequency the phase velocity approaches asymptotically the phase velocity of longitudinal waves in an infinitely extended medium, which equals about 1500 m/s for all types of rubber investigated.

Systematic deviations of the dispersion curves from their hyperbolic forms have not been found. A plotting of the experimental results in the above described way ($1/\lambda^2$ as a function of f^2) shows, at least for the softer types of rubber, also quantitatively a good agreement of the phase velocity with that in water (see Figs 10 a and 10 b). The intersections of the straight lines with ordinate and abscissa give $-1/d^2$ and $f_g{}^2$, their slope $1/c^2$ (c velocity of the longitudinal wave).

The change of the attenuation connected with the dispersion is very steep and equals a factor of 100 for change of frequency of only some kc/s – depending on the special type of rubber. It does not seem impossible to use this large alteration in attenuation for the construction of acoustic filters.

In spite of this large alteration of the value of the attenuation, a nearly constant value for the loss tangent is obtained if the attenuation – measured in dB/cm – is multiplied by the quotient c_{gr}/f and the loss tangent is calculated from this product (as from the product $\alpha\,\lambda$ in section 3.1). By this method, the fact that the vibration energy travels with the group velocity is considered.

The results of the measurements have been plotted in Figs. 11 and 12 resp. Fig. 11 shows the loss tangent of the two types of synthetic rubber. The values derived from the product $\alpha\,\lambda$ are plotted for

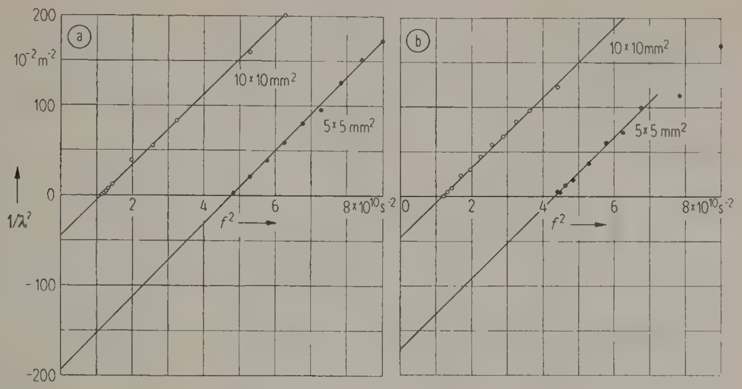


Fig. 10. Dispersion of "compressional waves" in bars of rubber;
(a) Natural rubber, hardness 95 DVM,
(b) Neoprene, hardness 65 DVM.

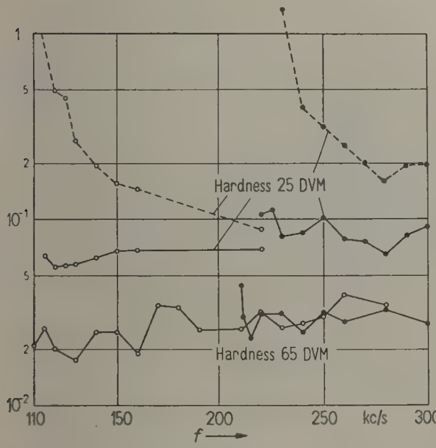


Fig. 11. Loss tangent measured with "compressional waves" in bars of rubber (Neoprene) of different hardness; — — — calculated from $\alpha\lambda$, ——— calculated from $\alpha c_{gr}/f$;
○ 10 × 10 mm²,
● 5 × 5 mm² cross-section.

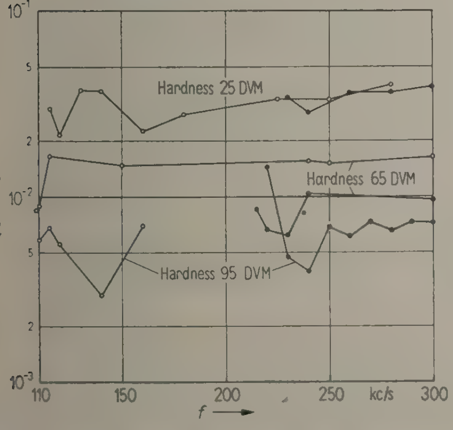


Fig. 12. Loss tangent measured with "compressional waves" in bars of natural rubber of different hardness. The values are calculated from $\alpha c_{gr}/f$;
○ 10 × 10 mm²,
● 5 × 5 mm² cross-section.

comparison. Fig. 12 shows the loss tangent of the three types of natural rubber. It is larger the harder the rubber and equals between 0.01 and 0.05, i. e. it is considerably smaller than the loss tangent of the extensional waves.

Fig. 13 shows a comparison between the theoretical course of the attenuation in the whole frequency range and the experimental results got with a rubber rod with the hardness 65 DVM and a cross-section of 10 × 10 mm². The full drawn straight line at low frequencies has been calculated for pure extensional waves with the constant loss tangent $\eta_D = 0.44$ and the constant phase velocity $c_D = 85$ m/s. The calculated course of the blocking attenuation in a liquid column of the same dimensions is given by the cross-section of the rod and the measured velo-

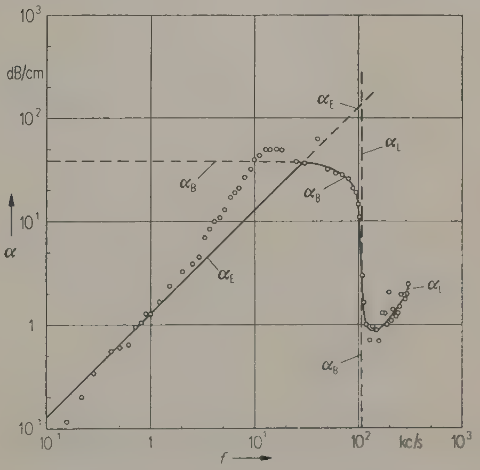


Fig. 13. Comparison between the theoretical course of the attenuation and the experimental results in bars of rubber (neoprene 10 × 10 mm², hardness 65 DVM).
α_E calculated for extensional waves ($c_D = 85$ m/s, $\eta_D = 0.44$),
α_L calculated for longitudinal waves ($c_L = 1590$ m/s, $\eta_L = 2 \ldots 3 \times 10^{-2}$),
α_B calculated for a liquid column below limiting frequency ($c_L = 1590$ m/s, $\eta = 0$).

city for longitudinal waves in the infinitely extended medium, being 1590 m/s. For the attenuation of longitudinal waves calculated from the group velocity, a linearly increasing loss tangent $\eta_L = 2$ to 3×10^{-2} has been assumed.

The experimental results can be summarized by stating that for an excitation in the longitudinal direction the sound propagation in rods of rubber or plastics is determined by either extensional or compressional waves. At low frequencies only the extensional waves can be excited, so that phase velocity and attenuation are given by Young's modulus (in the case of rubber nearly exclusively determined by the shear modulus) and its loss tangent.

For high frequencies the attenuation of the "compressional waves" is much smaller than that of the extensional waves so that only the first ones are observed, the sound propagation being determined by the bulk modulus and its loss tangent. In this frequency range the rods behave like columns of liquid.

The ranges of transmission of these two types of waves are separated by a more or less wide frequency range of low transmission of both the waves. In this frequency range the extensional wave shows an attenuation considerably increased by the geometric influence of the cross-section while the propagation of the compressional wave is blocked, because it is excited below its limiting frequency. The limits of this intermediate range are given by the cross-sectional dimensions of the rods, which are comparable with the wave length of the shear waves at the lower and that of the longitudinal waves at the upper limit.

The work described in this report was carried out under arrangements with the Department of Scientific and Industrial Research, London, whose assistance and interest are gratefully acknowledged. It is published with the permission of the Department.

Thanks are also due to the "Deutsche Forschungsgemeinschaft" for part of the apparatus.

(Received March 10th, 1957.)

References

[1] Firestone, F. A., Non-destructive testing **7** [1948], Nr. 2.

[2] Hüter, T., Z. angew. Phys. **1** [1949], 274.

[3] Meyer, E. and others, Sound absorption and sound absorbers in water. Bureau of Ships, Washington 25 DC (1947).
Kuhl, W. and Meyer, E., Dynamical properties of rubber and rubber-like materials in a large frequency range. Phys. Soc. Acoust. Group Symposium [1949], p. 181.

[4] Meyer, E. and Tamm, K., Acustica **2** [1952], Beiheft, 91.

[5] Pochhammer, L., Crelles J. Math. **81** [1876], 324.

[6] Schoch, A., Ergeb. exakt. Naturwiss. **23** [1950], 127.

[7] Schoch, A., Acustica **2** [1952], 1.

[8] Skudrzyk, E., Die Grundlagen der Akustik. Springer-Verlag, Wien 1954.

[9] Tamm, K., Akust. Z. **6** [1941], 16.

A NOTE ON RECIPROCITY IN LINEAR PASSIVE ACOUSTICAL SYSTEMS

by J. H. Janssen

Technical Physics Department T. N. O. and T. H., Delft, Netherlands

Summary

It is shown theoretically that linear acoustical passive systems can behave as so called reciprocity-violating systems; an example of such a system is a sound absorbing material that is porous as well as flexible.

Sommaire

On montre par la théorie que les systèmes acoustiques passifs et linéaires peuvent ne pas satisfaire au théorème de réciprocité. On en donne un exemple constitué par des matériaux absorbants à la fois poreux et flexibles.

Zusammenfassung

Das Reziprozitätsgesetz braucht nicht immer erfüllt zu sein für passive lineare akustische Systeme, wie zum Beispiel poröse Materialien mit elastischem Skelett.

1. Introduction

It is common engineering practice to calibrate electro-acoustic transducers by the so called reciprocity method (e. g. [1]).

In doing so the transducers are supposed not to violate the principle of reciprocity. If need be the same assumption is made as to the surrounding medium. Reciprocity is also — be it tacitly — assumed in the case of the measurement of the airborne sound insulation in buildings.

With this in view it seems worthwhile to draw the attention to two cases, that one meets even rather frequently in practice, in which a set-up is used that does violate the reciprocity principle. One case is that of flexural waves in plates [2]. Another case that will be dealt with in this paper is that of flexible porous materials.

As yet we cannot overlook the practical consequences of the possibly non-reciprocal behaviour of such materials, but it seems worthwhile to study this case, since flexible porous materials are used a great deal in acoustics, e. g. in anechoic rooms.

2. Reciprocity

Let us consider a closed vessel, the walls of which are rigid, containing air (Fig. 1). In the vessel there are two sound sources A and B and a cylindrical rigid, inert tube with open ends. The sound pressures p_0 and p_l as well as the particle velocities v_0 and v_l are for simplicity assumed to be constant all over the open ends. They may vary with time however. This simplification does not contain a loss of generality.

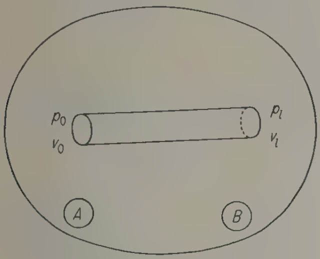


Fig. 1. An idealized linear acoustical fourpole, in the form of an inert tube, inside a closed vessel containing air.

The sound field $\varphi_A(\varphi_B)$ that occurs when the sound source $A(B)$ is in action satisfies (see list of symbols at the end of the paper):

$$\nabla^2 \varphi_A + k^2 \varphi_A = -q_A ,$$
$$\nabla^2 \varphi_B + k^2 \varphi_B = -q_B .$$

Outside the region A (B) the specific source strength q_A (q_B) vanishes.

According to Green:

$$\int (\varphi_A \, \partial\varphi_B/\partial n - \varphi_B \, \partial\varphi_A/\partial n) \, \mathrm{d}\sigma = \\ = \int (q_A \varphi_B - q_B \varphi_A) \, \mathrm{d}\tau ,$$

where σ and τ stand for surface and volume respectively. The surface integral vanishes when $\partial\varphi/\partial n$ is zero everywhere on the surface (rigid surface). It is already sufficient, however, when the surface is locally reacting, i. e. when the ratio of φ and $\partial\varphi/\partial n$ only depends upon the properties of the surface at the point where these quantities are considered.

We then have

$$\varphi_A = f(\sigma) \, \partial\varphi_A/\partial n ,$$
$$\varphi_B = f(\sigma) \, \partial\varphi_B/\partial n ,$$

which obviously results in a zero value of the surface integral.

If the regions A and B are very small in comparison to the wave length we may write

$$\varphi_B \int q_A \, \mathrm{d}\tau - \varphi_A \int q_B \, \mathrm{d}\tau = 0 ,$$

which yields the well known reciprocity theorem in its simplest form

$$\varphi_A V_B = \varphi_B V_A$$

or since φ is proportional to the sound pressure

$$p_A V_B = p_B V_A .$$

Reciprocity is apparently due to the vanishing of the surface integral which condition may be rewritten in p and v_n since these quantities are proportional to φ and $\partial\varphi/\partial n$ respectively:

$$\int (p_A v_{n_B} - p_B v_{n_A}) \, \mathrm{d}\sigma = 0. \qquad (1)$$

We are allowed to exclude the volume occupied by the cylinder in Fig. 1 from the total volume τ in question. Reciprocity between A and B then however requires that the surface integral (1) vanishes over the outer surface of the cylinder, *its open ends included.* The outer cylindrical surface of the cylinder does not contribute to the integral since the cylinder is supposed not to move. It follows that

$$(p_{0A} v_{0B} - p_{0B} v_{0A}) - (p_{lA} v_{lB} - p_{lB} v_{lA}) = 0 \qquad (2)$$

is the condition for reciprocity, equivalent to (1). This condition is satisfied for a tube filled with air. If, however, the tube is filled with an absorbing material conditions might be changed.

Suppose $p_0 = a\, p_l + b\, v_l$ and $v_0 = c\, p_l + d\, v_l$ and $a\,d - b\,c = \Delta$. Then one has for this fourpole

$$(p_{0A} v_{0B} - p_{0B} v_{0A}) - \Delta (p_{lA} v_{lB} - p_{lB} v_{lA}) = 0 .$$

One sees at a glance that only for $\Delta = 1$ reciprocity will hold, because only then (2) is satisfied.

3. Elastic porous materials

The theory of the absorption of sound in porous and elastic materials is fully treated in [3], [4], [5]. The equations of motion for the material of the skeleton and for the air inside the pores are given by

$$\varrho_1\, \partial v_1/\partial t + s\,(v_1 - v_2) - (1-h)\,(K_2/\mathrm{j}\,\omega)\; \partial^2 v_2/\partial x^2 - \left[K_1 + (1-h)^2\,(K_2 - P_0)/h\right](1/\mathrm{j}\,\omega)\; \partial^2 v_1/\partial x^2 = 0\,, \tag{3 a}$$

$$\varrho_2\, \partial v_2/\partial t + s\,(v_2 - v_1) - (h\,K_2/\mathrm{j}\,\omega)\; \partial^2 v_2/\partial x^2 - (1-h)\,(K_2 - P_0)\,(1/\mathrm{j}\,\omega)\; \partial^2 v_1/\partial x^2 = 0\,. \tag{3 b}$$

These equations may be treated as the Lagrangian form of the description for the motion of continuous mechanical systems (see for example [6]). Rayleigh proved the existence of reciprocity [7], unless so called gyrostatic terms occur. These terms are found in (3 a) from the coefficients for $\partial^2 v_2/\partial x^2$ and in (3 b) from the coefficients for $\partial^2 v_1/\partial x^2$ respectively (taking $\partial/\partial x = -\gamma$):

$$\left[-s/\gamma^2 - (1-h)\; K_2/\mathrm{j}\,\omega\right]$$

and

$$\left[-s/\gamma^2 - (1-h)\;(K_2 - P_0)/\mathrm{j}\,\omega\right].$$

It will be seen by comparison with [7] that Rayleigh's β_{rs} is formed for this case by $(1-h)\,P_0/2\,\mathrm{j}\,\omega$.

Already in 1951 it was found theoretically by the present author that in deducing the fourpole coefficients for layers of elastic and porous materials results were obtained which violated the reciprocity principle, unless $h \to 1$. This fact may now be explained. The differential equations describing the physical phenomena in such materials, as derived in [3], are of such a form as to result in fourpole coefficients a, b, c and d, which give $\Delta \neq 1$ unless the layer or blanket is symmetrically built or $h \to 1$. It may be expected therefore that for low frequencies and small values of h (the porosity) non-reciprocal fourpoles in the form of flexible blankets experimentally can be demonstrated; for example when one side of the blanket is open to the air and the other side is closed by a very thin (e. g. massless) membrane or film which is fixed on the flexible skeleton of the material.

Acknowledgment

The author wishes to thank Prof. Dr. C. W. Kosten for his untiring interest in this paper.

List of symbols used in this paper

φ_A, φ_B	Velocity potential for the sound field originating from source A, resp. B,
q_A, q_B	specific source strength of source A, resp. B,
n	normal to boundary of vessel,
k	wave number $(=\omega/c)$,
σ	boundary surface of vessel,
τ	volume of vessel,
V_A, V_B	source strength of source A, resp. B,
v_1	mean velocity of the solid material at x,
ϱ_1	density of the solid material as given by the mass of solid material per unit volume of porous material,
s	coupling coefficient,
v_2	mean velocity of the air at x; this quantity is $1/h$ times greater than the velocity of specific volume displacement,
h	cavity or porosity factor, i. e. ratio of the volume of the accessible holes to the total volume of the porous material,
K_2	normal modulus of air, if necessary to be taken complex in the case of losses being present (thermal or viscous),
K_1	specific stiffness of the frame, to be taken complex if necessary,
P_0	total equilibrium pressure of the air,
ϱ_2	density of the air as given by the mass of the air content per unit volume of porous material; it is h times the density of free air,
γ	$=\mathrm{j}\,\omega/c$,
c	complex sound velocity,
ω	pulsatance.

References

[1] Beranek, L. L., Acoustics. McGraw-Hill Book Co., London 1954, p. 377.

[2] Skudrzyk, E., Die Grundlagen der Akustik. Springer-Verlag, Wien 1954, p. 381.

[3] Zwikker, C. and Kosten, C. W., Sound absorbing materials. Elsevier Publ. Co., Amsterdam 1949, chapt. III.

[4] Richardson, E. G., Technical aspects of sound. Elsevier Publ. Co., Amsterdam 1953, chapt. 4 by C. W. Kosten.

[5] Kosten, C. W. and Janssen, J. H., Acoustic properties of flexible and porous materials. Acustica 7 [1957] 372.

[6] Goldstein, H., Classical mechanics. Addison-Wesley, Cambridge (Mass.), 1950, chapt. 11–3.

[7] Rayleigh, J. W. Strutt, Baron., The theory of sound. Dover Publ., New York 1945, chapt. IV–82.

ON THE THEORY OF THE RAYLEIGH-DISK AND THE SOUND PRESSURE RADIOMETER

by H. Højgaard Jensen and K. Saermark

Physics Department, Technical University of Denmark, Copenhagen

Summary

Expressions are derived for the mean torque H and the mean force $\bar{K}$ on a thin, rigid obstacle, placed in a plane, progressive sound wave of arbitrary wavelength. Numerical calculations are carried out for a long strip and a circular disk, in the latter case based upon earlier numerical results by Kotani, Bouwkamp and Kawai. It is found that, when the wavelength is varied, both $\bar{H}$ and $\bar{K}$ go through maxima and minima owing to resonance effects in the diffraction by the strip or disk.

Sommaire

On établit des expressions donnant le moment de torsion moyen $\bar{H}$ et la force moyenne $\bar{K}$ sur un obstacle mince et rigide qui se trouve dans une onde sonore plane et progressive, de longueur d'onde arbitraire. On fait le calcul numérique de $\bar{H}$ et $\bar{K}$ pour une bande longue et un disque circulaire; ce dernier cas est traité à partir des résultats numériques antérieurs de Kotani, Bouwkamp, et Kawai. On trouve que lorsque la longueur d'onde varie, H et $\bar{K}$ passent tous deux par des maxima et des minima, à cause d'effets de résonance intervenant dans la diffraction par la bande ou le disque.

Zusammenfassung

Es werden Ausdrücke gegeben für die mittlere Kraft K und das mittlere Drehmoment $\bar{H}$ auf einer dünnen Platte, die von einer fortschreitenden, ebenen akustischen Welle willkürlicher Wellenlänge getroffen wird. Numerische Berechnungen werden für das langgestreckte Band und die runde Scheibe durchgeführt. Im letzten Falle sind die Berechnungen auf frühere numerische Resultate von Kotani, Bouwkamp und Kawai aufgebaut. Wenn die Wellenlänge variiert wird, durchlaufen sowohl H als K Maxima und Minima, verursacht durch Resonanzeffekte bei der Beugung an der Platte.

1. Introduction

A sound wave impinging on a rigid body will exert a mean pressure, the radiation pressure, on the surface of the body. Consequently the resultant torque and force on the body usually will have non-zero mean values $\bar{H}$ and $\bar{K}$. This is utilized for measurement of sound intensities in two kinds of apparatus.

In the first, the *Rayleigh-disk*, the mean torque H on a plane disk or strip is measured. When the diameter of the disk or the width of the strip is so much less than the wavelength of the sound that the flow around the body is unaffected by compressibility, the torque will be independent of wavelength and is known in terms of the sound intensity from the theory of König [1] and Cisotti [2]. When the wavelength decreases and becomes comparable to the dimensions of the disk, the torque will vary and ultimately vanish. The Rayleigh-disk, therefore, is primarily an apparatus for absolute measurement of low-frequency sound. In the other apparatus, the *sound-radiometer*, the mean force $\bar{K}$ on a plane disk is measured. The theory of this instrument is only simple when the wavelength is so much smaller than the disk that the shadow of the disk is sharp. In this case $\bar{K}$ is independent of wavelength and related to the sound intensity in a simple and well known way. It follows that the sound-radiometer is especially suited for measuring high frequency sound. When the wavelength increases, the force will vary and ultimately vanish in the limit of very long wavelengths.

However it may sometimes be necessary to use the instruments in regions of wavelength where the above mentioned conditions for the validity of the simple theories are not fulfilled. It is the aim of this note to discuss the way in which H and $\bar{K}$ depend on wavelength in such cases. We treat the two-dimensional case of the strip and – in less detail – the three-dimensional case of the circular disk.

Parts of the problem have to some extent been treated in the literature. Kotani [3] has given an analytical expression for the torque on a circular disk and a series expansion in powers of ka, where k is the wave number and a the radius of the disk. This expansion is valid only for large wavelength. Awatani [3] and Kawai [3] have treated the circular disk and calculated $\bar{H}$ and $\bar{K}$ numerically for several values of the wavelength and the angle of incidence. Furthermore, LEVINE [3] has obtained an asymptotic formula, valid for very short wavelengths, for the torque on a strip, while KELLER (Research report from the institute of Mathematical Sciences of New York University) has shown, how improved asymptotic formulae for $\bar{H}$ and $\bar{K}$ may be obtained. His methods are applicable down to wavelengths as large as the scattering obstacle, and may thus be used for all ka-values not dealt with in this paper.

We make the following assumptions:

1. The disk or strip is freely suspended in a practically unlimited radiation field.
2. It can be treated as rigid. This requires that it has a mass much larger than the equivalent acoustic mass of a radiating body of the same form and size. This condition can usually be fulfilled in gases, but not in liquids. The effect of the forced vibrations and rotations of the circular Rayleigh-disk has been discussed theoretically by KING [4], WOOD [5] and KAWAI [3].
3. Sound absorption, vortex movement and turbulence are assumed negligible. We therefore treat the radiation field as a potential field, and the suspended body as non-absorbing.
4. Though some of the results in the following are valid for a wider class of radiation fields we usually consider only the case of the incoming wave being plane, progressive and monochromatic.

2. General expression for the torque

We consider a periodic undisturbed radiation field with velocity potential φ_0. The plane disk or strip P (Fig. 1) is placed in this field. P will produce a scattered wave ψ. The resulting velocity potential is $\varphi = \varphi_0 + \psi$. If φ_0 and ψ are known (see section 4) the torque on P around the vertical z-axis can be calculated in the following way:

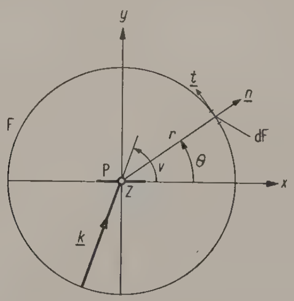


Fig. 1. Geometry and nomenclature for the scattering problem.

Consider a closed surface F surrounding P. Angular momentum is transported into the interior of F through action of the pressure from outside and by flow of matter carrying angular momentum. It is removed through P by the torque acting on P. Owing to the periodicity of the radiation field, the mean value of the angular momentum of the medium inside F is constant. Consequently the mean rate of transport from outside F must equal the mean rate of removal of angular momentum through P, but the latter is equal to the mean torque $\bar{H}$. Furthermore, if we let F be a surface of revolution with axis coinciding with the z-axis, the torque due to the pressure from outside F vanishes, and $\bar{H}$ is then equal to the mean rate of transport of angular momentum into F through material flow. Denoting the particle velocity by $\underline{u}$, the density of the medium by ϱ and using the notation of Fig. 1, this can be expressed by the equation

$$\bar{H} = -\int\limits_{\mathrm{F}} r\,\overline{\varrho\, u_n u_t}\,\mathrm{d}f \approx -\varrho_0 \int\limits_{\mathrm{F}} r\,\overline{u_n u_t}\,\mathrm{d}f\,, \qquad (1)$$

where a bar denotes mean value over a whole number of periods. In eq. (1) we have put ϱ equal to ϱ_0, the undisturbed density, as we shall only be interested in calculating $\bar{H}$ to second order in the particle velocity $\underline{u}$.

We now express $\underline{u}$ in terms of the velocity potential

$$\underline{u} = \mathrm{grad}\,\varphi\,, \qquad (2)$$

and at the same time we introduce the usual complex notation with the time-factor $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. We then get

$$\bar{H} = -\frac{1}{4}\,\varrho_0 \int\limits_{\mathrm{F}} r\,\mathrm{grad}_n\,\varphi\;\mathrm{grad}_t\,\varphi^*\,\mathrm{d}f + \mathrm{conj}\,. \qquad (3)$$

This expression is valid for arbitrary bodies and periodic radiation fields. Further simplifications are possible, when the scattering body is plane and of a thickness in the y-direction, small compared to the wavelength. We first consider the twodimensional case of P being a strip. F is then most conveniently taken to be a cylinder, and eq. (3) leads to the following expression

$$\bar{H} = -\frac{1}{4}\,\varrho_0 \int\limits_{\mathrm{F}} \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_0+\psi)\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\varphi_0+\psi)^*\,\mathrm{d}f + \mathrm{conj}\,, \qquad (4)$$

where θ is defined in Fig. 1.

The integral in eq. (4) is evaluated by means of the asymptotic value of the field for large values of r. In this case we have, because ψ represents an outgoing progressive wave, that

$$\partial\psi/\partial r = \mathrm{i}\,k\,\psi\,, \qquad (5)$$

where k is the wave number.

We also note that φ_0 depends on θ only through the combination $\theta - v$, where $\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ is the angle of incidence of the incoming wave. Consequently

$$\partial\varphi_0/\partial\theta = -\partial\varphi_0/\partial v\,. \tag{6}$$

Finally we use the fact, that

$$\psi(\theta) = -\psi(-\theta). \tag{7}$$

This follows, because the scatterer is plane, thin and rigid.

Now eqs. (5), (6) and (7) are introduced into eq. (4). Owing to eq. (7) only terms containing both the incoming and scattered waves contribute to the integral. The terms with $\partial\psi/\partial\theta$ and $\partial\psi^*/\partial\theta$ are simplified by partial integration over θ. We get

$$\overline{\underline{H}} = -\frac{1}{4}\,\varrho_0 \int\limits_{\substack{\mathrm{F}\\ r\to\infty}} \left[\psi^* \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial r} + \mathrm{i}\,k\,\varphi_0\right\}\right] \mathrm{d}f + \text{conj}\,. \tag{8}$$

This expression is very convenient, because the expression between curly brackets when resolved in partial waves will have the same asymptotic behaviour for $r \to \infty$ as ψ.

In the threedimensional case F is taken to be a sphere. By the same methods as above it is then seen that eq. (8) still holds. Only r now means the radius of the sphere.

3. General expression for the force

In this section we shall show, that there is a close connection between the mean force $\overline{K}$ on a thin disk or strip, and the scattering cross-section Q; in fact

$$\overline{K} = \varrho_0\,\overline{u_0^{\,2}}\,\sin v \cdot Q\,, \tag{9}$$

where $\overline{u_0^{\,2}}$ is the mean square of the particle velocity in the incoming plane progressive wave. Westervelt [6] has derived a general expression for the radiation pressure force on an obstacle of arbitrary shape. In the special case of a plane scatterer it can be reduced to eq. (9). For the sake of completeness we give a direct proof of eq. (9). We start by investigating the mean value $\overline{\Delta p}$ of the sound pressure at the surface of the scatterer.

In general $\overline{\Delta p}$ is determined by the following expression, which is correct to second order in $\underline{u}$:

$$\overline{\Delta p} = \frac{1}{2}\,\varrho_0\left(\frac{1}{c^2}\,\overline{\dot{\varphi}^2} - \overline{u^2}\right), \qquad (10)[1]$$

where c is the velocity of sound.

In complex notation eq. (10) is written

$$\overline{\Delta p} = \frac{1}{4}\,\varrho_0 (k^2\,\varphi\,\varphi^* - \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\varphi^*)\,. \tag{11}$$

From $\overline{\Delta p}$ we can calculate $\overline{K}$ by integrating over the entire surface of the scatterer

$$\overline{\underline{K}} = \int\limits_{\mathrm{P}} \overline{\Delta p}\,\underline{n}\,\mathrm{d}f\,, \tag{12}$$

where n is a unit vector in the direction of the inner normal to the surface of the scatterer.

The expression to be used for φ in eq. (11) is (compare Fig. 1)

$$\varphi = \varphi_0 + \psi = \frac{u_m}{k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x\cos v + y\sin v)} + \psi\,, \tag{13}$$

where u_m is the velocity amplitude of the incoming wave.

Combining eqs. (13), (11) and (12) and remembering, that when we pass from the front to the rear of the plane scatterer, φ_0 is unaltered while ψ changes sign, we get

$$\overline{\underline{K}} = \frac{1}{4}\,\varrho_0 \int\limits_{\mathrm{P}} \left(k^2\,\varphi_0\,\psi^* - \frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\,\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)\underline{n}\,\mathrm{d}f + \text{conj}\,. \tag{14}$$

The last term in eq. (14) is integrated by parts; ψ is zero at the edges of the disk, so the integrated parts vanish. The second derivative of φ_0 is obtained from eq. (13), whence

$$\begin{aligned}\overline{\underline{K}} &= \frac{1}{4}\,\varrho_0 \int\limits_{\mathrm{P}} \left(k^2\,\varphi_0\,\psi^* + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\,\psi^*\right)\underline{n}\,\mathrm{d}f + \text{conj} = \\ &= \frac{1}{4}\,\varrho_0\,k^2 \sin^2 v \int\limits_{\mathrm{P}} \varphi_0\,\psi^*\,n\,\mathrm{d}f + \text{conj}\,.\end{aligned} \tag{15}$$

By means of eq. (13) and the boundary condition, expressing that the normal component of the velocity is zero at the surface of the disk, we can now eliminate φ_0. In fact we get

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathrm{i}\,k\sin v\,\varphi_0 \tag{16}$$

whence by means of eq. (15)

$$\overline{K} = \frac{1}{4}\,\varrho_0\,\mathrm{i}\,k\sin v \int\limits_{\mathrm{P}} \left(\psi^*\,\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\,\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}f\,, \tag{17}$$

where $\partial\psi/\partial n$ is equal to $\pm\,\partial\psi/\partial y$ for $y \to \mp 0$.

---

[1] The expression (10) is well known from the literature (see e. g. [4]).

It is easily derived from Bernoulli's equation for a compressible medium

$$\dot{\varphi} + \frac{1}{2}u^2 + \int\limits_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\varrho} = 0\,,$$

where p_0 ist the pressure far from the radiation field. We expand $1/\varrho$ in powers of $\Delta p = p - p_0$, breaking off the series at the second member. Remembering that $\partial\varrho/\partial p = 1/c^2$ we get

$$\dot{\varphi} + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{\varrho_0}\Delta p - \frac{1}{2\,\varrho_0^{\,2}\,c^2}(\Delta p)^2 = 0\,.$$

From this eq. (10) is obtained by taking mean values, because $\overline{\dot{\varphi}} = 0$ and $\overline{\Delta p^2} = (\varrho_0\,\dot{\varphi})^2$ to second order.

The expression eq. (17) is now compared with the power scattered by the disk. If the disk were vibrating in such a way, that the radiated wavefield was ψ, the mean power transmitted to the medium would be

$$\overline{W} = -\int_{\mathrm{P}} \overline{\Delta p\, u_n}\, \mathrm{d}f \approx \varrho_0 \int_{\mathrm{P}} \dot{\psi}\, \frac{\partial \psi}{\partial n}\, \mathrm{d}f\,, \tag{18}$$

where the expression $\Delta p = -\varrho_0 \dot{\psi}$ for the first order pressure has been used and only second order terms in $\overline{W}$ are retained.

In complex notation eq. (18) is

$$\overline{W} = \frac{1}{4}\, \varrho_0\, \mathrm{i}\, \omega \int_{\mathrm{P}} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n}\, \mathrm{d}f + \text{conj}\,. \tag{19}$$

Using the relation $\omega = c\,k$ we get from eqs. (17) and (19)

$$\overline{K} = \frac{\sin v}{c}\, \overline{W}\,, \tag{20}$$

but the cross-section Q is defined as the ratio between the scattered power $\overline{W}$ and the incoming sound intensity $\varrho_0\, c\, \overline{u_0^2}$. Therefore eq. (20) proves eq. (9).

The actual calculation of $\overline{K}$ may again be made by means of the field far from the scatterer. Here the scattered wave is very nearly plane, and consequently the intensity is by eq. (5):

$$\varrho_0\, c\, \overline{u^2} = \frac{1}{2}\, \varrho_0\, c\, k^2\, \psi\, \psi^*\,. \tag{21}$$

$\overline{W}$ is then obtained by integrating eq. (21) over a closed surface surrounding the scatterer and everywhere lying in the distant field. From $\overline{W}$ and eq. (20) we then get

$$\overline{K} = \frac{1}{2}\, \varrho_0\, k^2 \sin v \int_{\mathrm{F}} \psi\, \psi^*\, \mathrm{d}f \qquad (r \to \infty)\,. \tag{22}$$

However, in case of the circular disk and the strip, Q is known from the literature and $\overline{K}$ is then obtained directly from eq. (9).

4. Calculation of the scattered wave ψ

In order to derive explicit expressions for the torque and force on a rectangular strip, exerted by an incoming plane wave with the wave vector lying in the xy-plane and the angle of incidence $\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ (see Fig. 1) it is necessary to know the wave ψ scattered by the strip. ψ is obtained from that solution of the wave equation

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \qquad (\varphi = \varphi_0 + \psi) \tag{23}$$

which satisfies the boundary conditions

$$\begin{aligned} \partial\varphi/\partial y &= 0 \quad \text{for} \quad y = 0 \\ \psi &\sim f(\theta) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}/\sqrt{r} \quad \text{for} \quad r \to \infty\,. \end{aligned} \tag{24}$$

The solution of these equations is well known (see [7]). Accordingly, we shall only – in order to fix the notation[2] – sketch the procedure.

Eq. (23) may be separated in elliptic cylinder coordinates

$$x = a \cosh \mu \cos \vartheta\,, \qquad y = a \sinh \mu \sin \vartheta\,,$$

where a is half the width of the strip, the surface of which is given by $\mu = 0$. The separated equations are second order differential equations of the Mathieu-type. The equation for ϑ defines, for all values of $(k\,a)^2 = s$, a complete set of eigenfunctions

even functions:

$$\mathrm{Se}_m(\vartheta, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{De}_n(s, m) \cos(n\,\vartheta)\,, \; m = 0, 1, 2, \ldots,$$

odd functions: (25)

$$\mathrm{So}_m(\vartheta, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Do}_n(s, m) \sin(n\,\vartheta)\,, \; m = 1, 2, \ldots.$$

In the following we shall refer to these functions simply as $\mathrm{Se}(s, \vartheta)$ and $\mathrm{So}(s, \vartheta)$. The functions are normalized so that $\mathrm{Se}(s, \vartheta) = 1$ and $\frac{\partial}{\partial \vartheta}\, \mathrm{So}(s, \vartheta) = 1$ for $\vartheta = 0$. For the μ-equation, which may be derived from the equation for ϑ by the substitution $\vartheta = \mathrm{i}\,\mu$, one gets the corresponding solutions $\mathrm{Je}_m(s, \mu)$ and $\mathrm{Jo}_m(s, \mu)$. For large r these functions asymptotically approach

$$\frac{1}{\sqrt{k\,r}} \cos\left[k\,r - \frac{\pi}{4}\,(2\,m + 1)\right].$$

In order to satisfy the boundary conditions eq. (24) it is necessary to introduce a second set of independent solutions to the equation for μ. Here we choose the functions denoted by $\mathrm{Ne}_m(s, \mu)$ and $\mathrm{No}_m(s, \mu)$ which asymptotically behave like

$$\frac{1}{\sqrt{k\,r}} \sin\left[k\,r - \frac{\pi}{4}\,(2\,m + 1)\right].$$

The linear combinations

$$\mathrm{Ho}_m(s, \mu) = \mathrm{Jo}_m(s, \mu) + \mathrm{i}\, \mathrm{No}_m(s, \mu)\,, \tag{26}$$

analogous to the Hankel-Functions, will satisfy the boundary condition on ψ for $r \to \infty$.

In this notation the required solution to eqs. (23) and (24) is, [7]:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \psi\,, \\ \varphi_0 &= \sqrt{8}\,\pi\, \frac{u_m}{k} \sum_m \mathrm{i}^m \left[\frac{\mathrm{Se}_m(s, v)}{\mathrm{M}_m^{\mathrm{e}}}\, \mathrm{Se}_m(s, \vartheta)\, \mathrm{Je}_m(s, \mu) \,+\right. \\ &\quad \left. +\, \frac{\mathrm{So}_m(s, v)}{\mathrm{M}_m^{\mathrm{o}}}\, \mathrm{So}_m(s, \vartheta)\, \mathrm{Jo}_m(s, \mu)\right], \end{aligned} \tag{27}$$

---

[2] Our notation follows that of "Tables relating to Mathieu-Functions" as closely as possible [8].

$$\psi = -\sqrt{8\pi}\,\frac{u_m}{k}\sum_m \mathrm{i}^m \frac{\mathrm{So}_m(s,v)}{\mathrm{M}^{\mathrm{o}}_m}\,\frac{1}{(1+\mathrm{i}\,f_{\mathrm{o},m})}\times$$
$$\times\,\mathrm{So}_m(s,\vartheta)\,\mathrm{Ho}_m(s,\mu),$$

where $\mathrm{M}^{\mathrm{e}}_m = \int\limits_0^{2\pi} [\mathrm{Se}_m(s,\vartheta)]^2\,\mathrm{d}\vartheta$

and $\mathrm{M}^{\mathrm{o}}_m = \int\limits_0^{2\pi} [\mathrm{So}_m(s,\vartheta)]^2\,\mathrm{d}\vartheta$

and $f_{\mathrm{o},m} = \dfrac{\mathrm{No}'_m(s,0)}{\mathrm{Jo}'_m(s,0)}$ with $'$ meaning $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$. It is seen that also $f_{\mathrm{o},m}$ and $\mathrm{M}^{\mathrm{e,o}}_m$ are functions of $s=(k\,a)^2$.

5. Explicit expressions for the torque and force on a strip

With the expression for the scattered wave given by eq. (27) we easily get an explicit expression for the torque on a Rayleigh-strip. Introducing eq. (27) in eq. (8), using the asymptotic values of the radial functions Je, Jo and Ho together with the fact that the Mathieu-functions form an orthogonal set of eigenfunctions we get for the numerical value of $\overline{H}$:

$$\overline{H} = \frac{8\pi\varrho_0\overline{u_0^2}}{k^2}\sum_m \frac{f_{\mathrm{o},m}}{1+f^2_{\mathrm{o},m}}\cdot\frac{\mathrm{So}_m(s,v)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_v}\,\mathrm{So}_m(s,v)}{\mathrm{M}^{\mathrm{o}}_m} \qquad (28)$$

where we have introduced $\overline{u_0^2}$ instead of u_m.

Similarly we could get an expression for the force $\overline{K}$ by means of eq. (27) and eq. (22). However, using the known scattering cross-section for the strip (see [7]) together with the general expression eq. (9) we immediately have

$$K = \frac{8\pi\varrho_0 u_0^2}{k}\sin v\sum_m \frac{1}{1+f^2_{\mathrm{o},m}}\,\frac{[\mathrm{So}_m(s,v)]^2}{\mathrm{M}^{\mathrm{o}}_m}\,. \qquad (29)$$

In the next section we shall give the results of numerical calculations based on the expressions eqs. (28) and (29).

We have further found an expansion of the torque $\overline{H}$ in powers of $s=(k\,a)^2$. However, as the expansion converges very slowly, we shall only give the first terms for the special case $v=45°$. We find

$$\overline{H} = \pi\varrho_0\overline{u_0^2}\,a^2\cdot\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{1}{8}\quad\frac{1}{4}\ln\frac{\gamma\,k\,a}{4}\right)(k\,a)^2+\ldots\right] \qquad (30)$$

with $\gamma = 1.7811$. As will be seen by comparison with the numerical calculations in the next section, this expression is only valid when $k\,a \lessapprox 0.5$.

6. Numerical results

By means of eqs. (28) and (29) we have performed the following calculations:

a) The torque $\overline{H}$ as a function of $k\,a$ for the constant angle of incidence $\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=45°$.

b) The torque $\overline{H}$ as a function of the angle of incidence $\left(\frac{\pi}{2}-v\right)$ for constant value of $(k\,a)^2=1.4$.

c) The force K as a function of $k\,a$ for $v=\frac{\pi}{2}$.

The functions $\mathrm{So}(s,v)$ and $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\mathrm{So}(s,v)$ were calculated by means of the coefficients $\mathrm{Do}_n(s,m)$ (see eq. (25)) tabulated in [8]. However, for some values of s it was necessary to make a graphical interpolation of these coefficients. This was done by means of the coefficients $\mathrm{F}^m_n(=\mathrm{Do}_n(s,m))$ tabulated in [9]. The quantities $f_{\mathrm{o},m}$ were taken from [8].

Table I. The torque H on a rectangular strip ($v=45°$).

$(ka)^2$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$\overline{H}$
0				1.0000
0.25				1.120
0.36	1.1875			1.1875
0.60	1.2373			1.2373
0.80	1.2278			1.2278
1.00	1.1739	0.0053	− 0.0010	1.1782
1.2	1.0845	0.0076	− 0.0014	1.0907
1.4	0.9730	0.0104	− 0.0019	0.9816
1.6	0.8541	0.0137	− 0.0025	0.8653
2.0	0.6315	0.0215	− 0.0039	0.6491
2.5	0.4203	0.0341	− 0.0061	0.4483
3.0	0.2814	0.0496	− 0.0088	0.3222
4.0	0.1346	0.0885	− 0.0154	0.208
5.0	0.0705	0.1337	− 0.0236	0.181
6.0	0.0397	0.1744	− 0.0332	0.181
7.0	0.0236	0.1982	− 0.0439	0.178
8.0	0.0146	0.1990	− 0.0555	0.158
9.0	0.0094	0.1815	− 0.0676	0.123
14.0		(including $m=5$)		− 0.0610

The torque H as calculated by eq. (28). The terms in eq. (28) with $m=1, 2, 3$ are shown, together with the final value. H is measured in the unit given by eq. (31).

The results of the calculations for H are shown in Table I. To give an impression of the convergence of eq. (28) we have shown the contributions from the terms $m=1$, 2 and 3. It will be seen that the convergence is rather good. Further, for $(k\,a)^2=14$, we have calculated the terms up to and including $m=5$. We find $H=-0.0610$ in the unit given by eq. (31). The surprising fact, that H may become negative, was first demonstrated by AWATANI [3] for the circular disk. For this value of $k\,a$, LEVINE's asymptotic expression gives a vanishing torque; using KELLER's methods, however, correction terms may be deduced securing a better agreement. For still larger values of $k\,a$ the torque H oscillates between positive and negative values. In Fig. 2 we have plotted $\overline{H}$ vs. $k\,a$. The unit used for $\overline{H}$ is the well known low frequency limit:

$$H_0 = \pi\varrho_0 u_0^2 a^2 \sin v \cos v \qquad (31)$$

with $v = 45°$. For $ka < 0.5$ the curve is based on the expansion eq. (30).

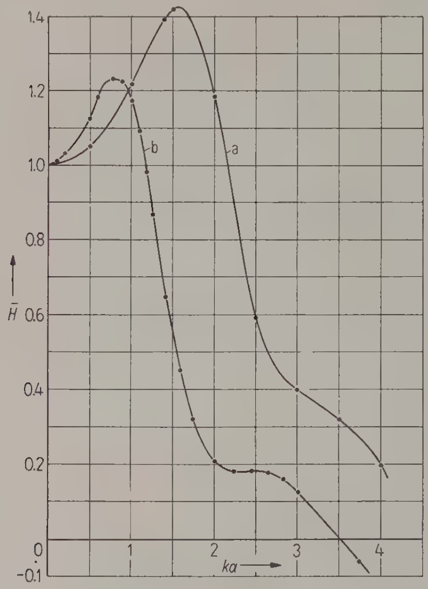


Fig. 2. $\bar H$ vs. ka for a) the circular disk and b) the rectangular strip, both in units of the low frequency limit. The angle of incidence is 45°.

In Fig. 3 we have plotted $\bar H$ vs. v for $(ka)^2 = 1.4$. H is here measured in units of $\pi \varrho_0 \overline{u_0^2} a^2$. In Fig. 4 we show $\bar H$ vs. v with $\bar H$ measured in the unit given by eq. (31). In this case $\bar H$ should be equal to 1 for all values of v if eq. (31) were valid for all frequencies.

Finally in Fig. 5 we have plotted the force $\bar K$ vs. ka for $v = \pi/2$. $\bar K$ is here measured in units of the high frequency limit $4 \varrho_0 \overline{u_0^2} a$. Here, too, we have neglected terms with $m \geqq 4$ in eq. (29). However, this is not admissible for large values of ka. Accordingly the curve for $ka \gtrapprox 3$ is shown broken.

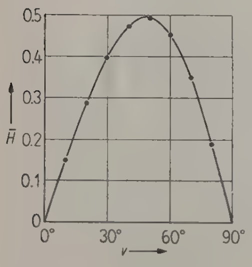


Fig. 3.
$\bar H$ vs. v for the rectangular strip, $(ka)^2 = 1.4$. The unit for $\bar H$ is $\pi \varrho_0 \overline{u_0^2} a^2$.

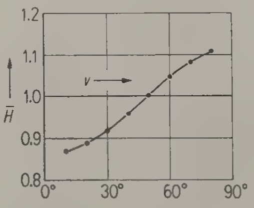


Fig. 4.
$\bar H$ vs. v for the rectangular strip, $(ka)^2 = 1.4$. $\bar H$ is here measured with the unit $\pi \varrho_0 \overline{u_0^2} a^2 \sin v \cos v$.

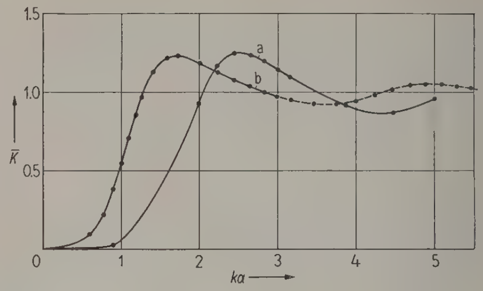


Fig. 5. The force $\bar K$ vs. ka for a) the circular disk and b) the rectangular strip, both in units of the high frequency limit.

7. The circular disk

In Fig. 2 we have also drawn a curve showing the torque on a circular disk[3] as a function of ka for the case of $v = 45°$. It is based on the series expansion (valid to $ka \approx 1$) of Kotani and the numerical calculations of Kawai, supplemented by our own calculations, made by means of "Tables of spheroidal functions" [10], [11]. The unit for $\bar H$ is the value given by Königs formula, i.e. $\frac{4}{3} \varrho_0 \overline{u_0^2} a^3$. It will be seen that the circular disk shows qualitatively the same behaviour as the strip does, the main differences being a somewhat larger value of the maximum torque and a displacement of the curve towards larger values of (ka).

The problem of the scattering cross section of the circular disk has already been treated numerically by Bouwkamp [12] and by Levine and Schwinger [13]. From their results K is determined by eq. (9).

In Fig. 5 we have, for comparison with the strip, shown the curve thus obtained from Bouwkamp's data. It will again be noted that the two curves are qualitatively similar.

8. Discussion

8.1. *The torque $\bar H$.*

It will be seen from Fig. 2 that the torque $\bar H$ for $ka \gtrapprox 0.1$ shows considerable deviation from the simple low frequency formula eq. (31). After passing through a maximum around $ka \approx 0.8$ it decreases rapidly towards zero. For $ka > 1.2$ the exact value of $\bar H$ is less than the value given by eq. (31). It is evident that we have to do with a resonance phenomenon of the type well known from related diffraction problems (see [12], [13], [14], [15]). The ka value for the first maximum corresponds to a ratio between the with of the strip and the wavelength of $2a/\lambda \approx 1/4$ whereas the next maximum — or point of inflection — corresponds to $2a/\lambda \approx 3/4$.

---

[3] For the circular disk a is the radius.

The deviation of H from the value of eq. (31) for $k a=0.8$ amounts to $\approx 25\%$, a rather large and presumably measurable effect. In spite of this the effect does not seem to have been found experimentally.

The torque on a Rayleigh-strip has been measured for varying values of $2a/\lambda$ by Hartmann and Mortensen [14], [15]. For a constant sound field they have measured the ratio E_R/E_B, where E_R is the sound intensity as measured by a Rayleigh-strip, and E_B is the sound intensity as measured by a suitable sound-radiometer. Their curve, which, however, is based on only four points, does not show any trace of a resonance. The decrease in numerical value of H occurs already for $k a \gtrapprox 0.6$, whereas below this value $\bar{H}$ appears to be constant. In comparing this with our calculations it is however important to have in mind the following points.

a) We have neglected a possible vortex and turbulence formation, b) the sound field used by Hartmann and Mortensen is not entirely monochromatic and c) their measurements consist of only four points rather widely spaced with regard to the value of $k a$.

Concerning the first point, vortex and turbulence formation, it is very difficult to form a definite opinion as to the possible consequences of these effects. Experimentally Merrington and Oatley [16] and Scott [17] at low frequencies ($k a \lessapprox 0.2$) find for the circular Rayleigh-disk a definite, essentially constant deviation of H from König's value, amounting to $\approx 10\%$. They attribute this deviation to the formation of vortices. This formation is demonstrated by photographs. The experiments are made at very low frequencies. The effect of vorticity presumably will diminish at higher frequencies, because the thickness of the boundary layer will be of the order of magnitude $\sqrt{\nu/\omega}$, where ν is the kinematic viscosity and ω the angular frequency. At frequencies, where it is necessary to correct for the diffraction effects, the boundary layer thickness will be very small indeed, and one is inclined to assume that vorticity and other effects of viscosity will be of minor importance. With regard to b), Hartmann and Mortensen state that their sound field, produced by an acoustic air jet generator, contains higher harmonics. This will have the effect that the resonance maximum is lowered and moved to lower values of $k a$ and thus diminish the discrepancy between our curve and that of Hartmann and Mortensen. However, the experimental material does not seem to be conclusive. Finally the consequences of point c) are obvious.

For the torque on the circular Rayleigh-disk, Barnes and West [18] have found experimental results, which qualitatively agree with the curve shown in Fig. 2. They find for the deviations from König's value, the latter realized by means of a standard disk with $k a$ very small, the following results:

$0.1 < k a < 0.6$: uniform distribution of deviations around a mean value zero, within $\pm 12\%$,
$0.9 < k a < 2$: all deviations positive, maximum deviation for $k a \approx 1.2$ amounting to $20-30\%$,
$k a \approx 2.4$: all deviations negative and of order $10-20\%$.

This is qualitatively, and also with regard to order of magnitude, in agreement with the theoretical values for H.

Also with regard to the angular dependence of H we find rather large deviations from eq. (31). This is most clearly seen from Fig. 4. Here H should be constant and equal to 1 if eq. (31) were valid for all frequencies. Instead of this, H varies between 0.87 and 1.1. It may be possible to investigate the theory through this angular dependence of $\bar{H}$.

8.2. *The force K at perpendicular incidence.*

The force K on a strip, exerted by the perpendicular incoming wave, shows a series of maxima and minima, the first maximum occurring at $k a \approx 1.7$ corresponding to a ratio of $2a/\lambda \approx 1/2$ between the width of the strip and the wavelength. This is approximately twice the corresponding value for the torque. For the circular disk Hartmann and Mortensen have investigated the dependence of the force on $k a$ [14], [15]. They measured the ratio E_B/E_R. Here E_B is the intensity of the sound field measured by the radiometer, whereas E_R is the intensity of the same sound field mesured by the torque on a Rayleigh-strip, $k a$ being small enough for eq. (31) to be valid. Their results are in excellent agreement with the curve in Fig. 5, although some of their curves for E_B/E_R vs. $k a$ for large $k a$ tends to a value <1. However, this has hardly any direct relevance in this connection. Hartmann and Mortensen find maxima and minima of E_B/E_R – i.e. of K – for the following $k a$ values [14]

Maxima: $k a \approx 5.7$; 8.8;
Minima: $k a \approx 4.4$; 7.5; 10.7.

Evidently, a first maximum has escaped observation. This is due to the fact that the measurements are restricted to $k a \gtrapprox 3$.

This is now to be compared with the theoretical curves based on the results of Bouwkamp [12] Fig. (5). Here the maxima and minima are given by

Maxima: $k a \approx 2.4$; 5.5; 9.1;
Minima: $k a \approx 4.3$; 7.3.

The agreement is excellent. In view of this, it ap-

pears reasonable to expect a similar agreement in the case of the force on a strip. With regard to the force $\bar{K}$ at perpendicular incidence it thus appears safe to neglect vortices and turbulence. Whether this holds in general may be dubious (compare [6]).

Acknowledgement

Our thanks are due to Professor Dr. R. E. H. Rasmussen, who has directed our attention to the need for a theory of the performance of a Rayleigh-strip at high frequencies. We also want to thank Mr. E. B. Hansen, M. Sc. for information concerning the litterature on diffraction problems.

(Received March 2nd, 1957.)

References

[1] König, W., Ann. Phys. Lpz. **43** [1891], 43 – 60.
[2] See Lamb, H., Hydrodynamics, § 71, 4th edition. Cambridge Univ. Press, 1916.
[3] Kotani, M., Proc. Math. Phys. Soc. Japan 3; **15** [1933], 30. Kawai, N., The Science Rep. of Tohoku Univ. 1. Ser. **35** [1951], 210. Awatani, T., J. acoust. Soc. Jap. **7** [1951], 92. Levine, H., Proc. Cambr. Phil. Soc. **53** [1957], 234.
[4] King, V., Proc. Roy. Soc. (London) A **153** [1935], 1 and 17.
[5] Wood, A. B., Proc. Phys. Soc. (London) **47** [1935], 779.
[6] Westervelt, P. J., J. acoust. Soc. Amer. **23** [1951], 312.
[7] Morse, P. M. and Feshbach, H., Methods of theoretical physics II. McGraw-Hill Book Co., New York 1953.
[8] Tables relating to Mathieu-functions. Columbia Univ. Press 1951.
[9] Stratton, I. A., Morse, P. M., Chu, L. I. and Hutner, R. A., Elliptic cylinder and spheroidal wavefunctions. Technology Press M.I.T. 1941.
[10] Meixner, J. and Schäfke, F. W., Mathieusche Funktionen und Sphäroid-Funktionen, Springer-Verlag, Berlin 1954.
[11] Stratton, I. A. et all., Spheroidal functions. Technology Press M.I.T. 1956.
[12] Bouwkamp, C. J., Thesis, Groningen 1941.
[13] Levine, H. and Schwinger, I., Phys. Rev. **75** [1949], 1423.
[14] Hartmann, J. and Mortensen, T., Ing. Vid. Skrifter 1948, Nr. 2 (in English).
[15] Hartmann, J. and Mortensen, T., Phil. Mag. **39** [1948], 377.
[16] Merrington, A. C. and Oatley, C. W., Proc. Roy. Soc. (London) A **171** [1939], 505.
[17] Scott, R. A., Proc. Roy. Soc. A **183** [1945], 296.
[18] Barnes, E. and West, W., J. Inst. Elect. Engrs. **65** [1927], 871.

ABAQUES POUR LE CALCUL DE L'ABSORPTION ACOUSTIQUE DES PAROIS PERFORÉES

par P. Lienard

Chef de Division Acoustique, Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques,
Châtillon-sous-Bagneux, France

Sommaire

Les calculs des structures perforées tant continues que cloisonnées (employées comme absorbants aux basses fréquences) sont assez complexes et fastidieux pour des applications nombreuses et diverses. C'est pourquoi l'auteur a établi des abaques permettant un calcul rapide et d'un mode d'emploi plus général. Des vérifications expérimentales (en cours) donnent déjà de bons résultats.

Zusammenfassung

Die Berechnung von gelochten Strukturen mit sowohl durchgehendem als auch unterteiltem Hohlraum, wie sie für Tiefenabsorber angewandt werden, ist für die zahlreichen Anwendungen ziemlich kompliziert und langwierig. Deshalb hat der Verfasser Rechentafeln aufgestellt, die eine schnelle und allgemein anwendbare Berechnung gestatten. Gegenwärtig durchgeführte experimentelle Nachprüfungen liefern gute Ergebnisse.

Summary

Calculations of the low-frequency absorptions of the widely-used perforated structures (whether continuous or in the form of bulkheads) are complex and difficult. For this reason the author has set up abaci suitable for rapid calculation and general use. Tests now in hand of these are already showing good results.

1. Introduction

On sait que les absorbants usuels, fibreux ou poreux, sont assez peu efficaces en basse fréquence, et qu'on emploie de plus en plus dans ce domaine des panneaux perforés à faible taux de perforation, formant autant de résonateurs d'Helmholtz, dont les cavités sont les volumes d'air compris entre la paroi perforée et le mur rigide.

Ces structures ont l'avantage d'être assez peu coûteuses, peu fragiles, de supporter les gaz chauds et humides et de pouvoir être accordées sur des fréquences même infra-sonores, en donnant aux volumes d'air des dimensions suffisantes.

Ces qualités nous ont fait utiliser ce type d'absorbant pour les sorties de gaz de laboratoires de combustion construits par l'O.N.E.R.A., qui sont sources de bruits très intenses et doivent recevoir une insonorisation très soignée en raison de leur proximité de zones résidentielles.

On sait qu'il existe deux types de structures perforées: *les structures continues*, où les divers volumes placés derrière chaque orifice ne sont pas séparés, et *les structures cloisonnées*, analogues à des résonateurs juxtaposés.

Les caractéristiques acoustiques de ces structures sont calculables, mais les calculs fastidieux que cela entraîne nous ont conduits à rechercher des méthodes graphiques.

2. Calcul des structures perforées

L'étude de ces parois perforées a été faite par plusieurs auteurs, expérimentalement et théoriquement. Pour l'étude d'insonorisation signalée plus haut, nous avons utilisé les formules établies par J. Brillouin [1], que nous rappelleron ci-dessous, ainsi que les notations:

A	coefficient d'absorption cherché (rapport d'énergies),
c	vitesse du son,
f_0	fréquence propre d'un résonateur à la température ordinaire,
f_t	fréquence propre à la température t° C,
t	température centésimale,
Ω	rapport de la fréquence d'excitation à la fréquence propre,
H	résistivité relative de la paroi perforée, ou rapport de la résistivité des trous à la résistance spécifique de l'air,
K	coefficient d'épaisseur de la structure,
σ	taux de perforation de la paroi,
e	épaisseur de la lame d'air entre paroi et mur,
l	longueur de chaque col de résonateur, c'est-à-dire généralement, épaisseur de la paroi perforée,
l'	longueur corrigée du col,
θ	angle d'incidence du son.

La longueur corrigée l' se calcule à partir de l par des formules assez empiriques:

$l' = l + \frac{\pi}{2}\,r$ pour un col unique circulaire de rayon r

ou $l' = l + 0{,}96\,\sqrt{s}$ pour un col de section s

ou $l' = l + \frac{\pi}{4}\,r$ pour plusieurs cols circulaires voisins.

La fréquence propre est donnée par

$$f_0 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma}{e\,l'}} \tag{1}$$

avec $c = 34\,000$ cm/s à 20° C et le coefficient d'épaisseur par

$$K = \sqrt{\frac{e\,\sigma}{l'}}. \tag{2}$$

Ces deux formules seront utilisables pour les structures continues comme pour les structures cloisonnées; dans ce dernier cas on tiendra simplement compte de l'épaisseur des parois transversales, dont la tranche doit être déduite de la surface totale de la paroi perforée quand on calcule σ.

La vitesse du son c variant avec la température, il y aura lieu d'en tenir compte dans le calcul de f si la température est notablement différente de la température ordinaire, comme cela se produit à la sortie de chambres de combustion.

La fréquence de résonance sera calculée par

$$f_t = f_0\,\sqrt{1 + \frac{t}{273}}. \tag{3}$$

Les calculs faits par J. Brillouin [1] aboutissent aux expressions suivantes:

Pour les structures continues

$$A_1 = \frac{4\,H\cos\theta}{(H\cos\theta + 1)^2 + N_1^{\,2}} \tag{4}$$

avec $$N_1 = \frac{1}{K}\,\Omega\cos\theta - \cot K\,\Omega\cos\theta.$$

Pour les structures cloisonnées

$$A_2 = \frac{4\,H\cos\theta}{(H\cos\theta + 1)^2 + N_2^{\,2}\cos^2\theta} \tag{5}$$

avec

$$N_2 = \frac{\Omega}{K} - \cot K\,\Omega\,.$$

La validité de ces formules a déjà été vérifiée par leur auteur.

Un travail analogue de Ingard et Bolt [2] aboutit à des expressions presque identiques, dans lesquelles le terme en $1/K$ des expressions N_1 et N_2 est remplacé par $\cot K$. Les deux formules sont pratiquement semblables pour K petit; même si K prend des valeurs notables, l'écart obtenu pour A n'est pas très grand (par exemple pour $K = 0{,}8$, $H = 1$, $\cos\theta = 0{,}5$, on obtient respectivement par les deux formules $A = 0{,}38$ et $0{,}36$ pour $\Omega = 1$; $0{,}84$ et $0{,}9$ pour $\Omega = 2$; $0{,}24$ et $0{,}35$ pour $\Omega = 4$).

Ces formules, sans être d'une grande complexité, entraînent cependant des calculs numériques fastidieux, surtout quand les études d'un projet obligent à les appliquer très souvent en faisant varier l'un ou l'autre paramètres.

Il faut remarquer de plus que le rapport H ne peut être connu qu'expérimentalement et qu'alors les expressions (4) et (5) doivent être résolues en H.

Les graphiques donnés dans la référence [2] ne correspondent qu'à quatre valeurs du rapport H (désigné alors par θ) et ne permettent guère l'interpolation.

Nous avons donc été amenés à établir des abaques plus généraux, permettant le calcul rapide, avec une précision analogue à celle des mesures acoustiques, des expressions (1) à (5).

3. Calcul graphique de f et K

Les équations (1) à (3), sous forme de produits, se prêtent bien à la réalisation d'un abaque à points alignés, les échelles étant parallèles et à graduations logarithmiques.

La construction de cet abaque ne présente pas de difficulté et son emploi est immédiat: les valeurs de σ et l' ayant été déjà calculées pour un système de résonateurs donné ou supposé, on joint par une droite les points correspondants de ces deux échelles, et le point d'intersection de cette droite avec l'axe σ/l' est joint à la valeur donnée ou choisie de e (l'axe σ/l' n'a pas été gradué).

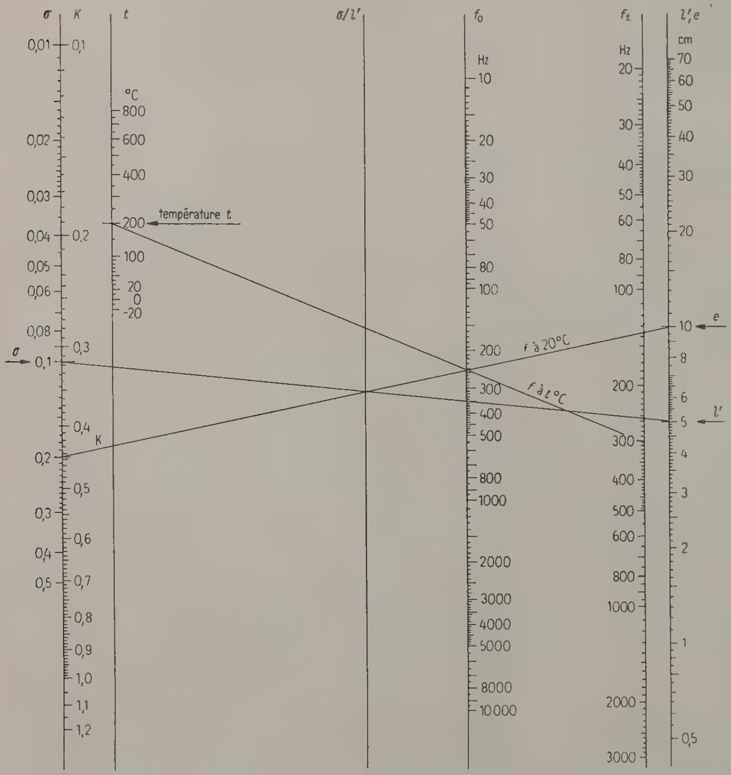


Tableau I. Abaque pour le calcul de la fréquence propre et du coefficient d'épaisseur des parois perforées.

On obtient ainsi les valeurs de K et de f à 20° C sur les axes correspondants. Un axe gradué en température permet d'obtenir f_t à partir de $f_{20°}$.

4. Calcul graphique de l'absorption des structures continues

Le calcul des expressions (4) et (5) est plus compliqué et a été résolu par des réseaux de courbes.

Les produits $\Omega \cos\theta$ et $H \cos\theta$ sont calculables par points alignés: il a semblé plus commode de marquer cette correspondance par des réseaux de courbes, pour obtenir un graphique homogène. Avec des graduations logarithmiques de module convenable, ces courbes sont des droites à 45°.

La partie essentielle de l'abaque porte les courbes:

$$N^2 = \left(\frac{\Omega \cos\theta}{K} - \cot K\, \Omega \cos\theta\right)^2 ,$$

K prenant les valeurs successives d'un paramètre variable, et les courbes:

$$N^2 = \frac{4\, H \cos\theta}{A} - (H \cos\theta + 1)^2 \;;$$

A étant le paramètre.

Les abscisses sont graduées en valeurs de $\Omega \cos\theta$ ou $H \cos\theta$ et N^2.

Les premières courbes présentent une variation très rapide au voisinage de $N = 0$. L'échelle de N^2 ne peut être logarithmique, en raison de la forme trop pointue que prennent alors les courbes $K = \text{const}$, ni linéaire, en raison de l'étalement des valeurs que prend ce nombre.

On a pris une échelle arbitraire pour N^2, telle que le courbe $K = 0{,}5$ soit représentée par deux droites. A partir de ces droites, on a construit une courbe d'étalonnage des longueurs de l'axe des ordonnées en fonction des valeurs de N^2 (non reproduites) et là, les autres courbes $K = \text{const}$. L'usage de l'abaque, pour les structures continues, s'en déduit immédiatement.

La partie (1) du graphique permet de passer des valeurs de H et Ω à celles de $H \cos\theta$ et $\Omega \cos\theta$, reportées sur le même axe des abscisses de la partie (2).

Partant de $H\cos\theta$ et $\Omega\cos\theta$, K étant connu, l'horizontale de l'intersection de K avec $\cos\theta$ coupe $H\cos\theta$ sur la courbe de la valeur cherchée de A.

Inversement, on peut à partir de A donné, déterminer K ou H.

On remarquera que la valeur maximum de l'absorption A est obtenue quand on se place le plus bas possible sur le diagramme, soit pour $N = 0$: le maximum de A est donné en fonction de $H\cos\theta$ par les deux graduations en regard de l'axe des abscisses.

La forme des courbes $K =$ const permet aussi de se rendre compte de l'acuité des courbes d'absorption en fonction de la fréquence quand K est petit.

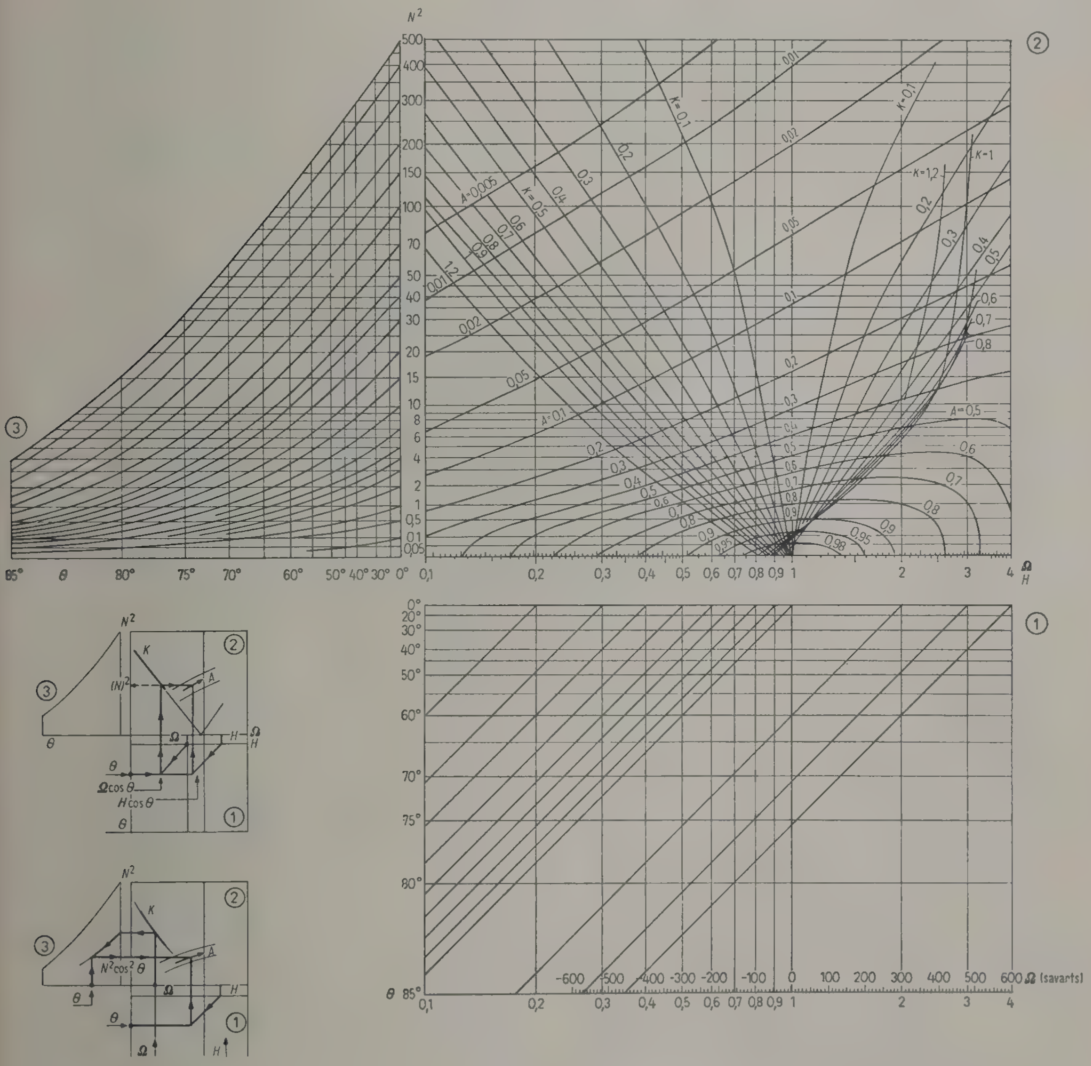


Tableau II. Abaque pour le calcul de l'absorption des parois perforées.

Nous préciserons plus loin comment on peut calculer l'intervalle quadrantal.

5. Calcul graphique de l'absorption des structures cloisonnées

Les mêmes abaques sont utilisables pour le calcul des *structures cloisonnées* moyennant une adjonction: en effet les équations (5) permettent de calculer N_2^2 à partir de Ω et K comme on a calculé N_1^2 à partir de $\Omega\cos\theta$ et K, et les graduations Ω et $\Omega\cos\theta$ sont les mêmes. On calcule également A_2 à partir de $H\cos\theta$ et $N_2^2\cos^2\theta$ comme A_1 à partir de $H\cos\theta$ et N_1^2.

La partie (3) de l'abaque permet le calcul de $N^2 \cos^2 \theta$ par des courbes continues (dont la forme dépend de l'échelle arbitraire de N^2).

L'emploi de l'abaque pour les structures cloisonnées s'en déduit ainsi: pour chaque valeur de Ω, la courbe K étant choisie sur la partie (2), on détermine l'horizontale d'ordonnée N^2; en suivant la courbe correspondant à cette valeur jusqu'à l'abscisse de θ dans la partie (3), on détermine l'ordonnée $N^2 \cos^2 \theta$, la valeur de A correspond à celle des courbes (interpolée au besoin) passant par l'intersection de cette ordonnée avec l'abscisse $H \cos \theta$.

6. Étude de l'intervalle quadrantal

On sait que, sur une courbe de résonance, l'intervalle quadrantal est l'écart des deux fréquences pour lesquelles l'amplitude (ou l'absorption dans le cas présent) est égale à la moitié du maximum.

Dans le cas des structures continues, si H, θ et K sont fixes, la valeur de $H \cos \theta$ détermine sur le même axe la valeur du maximum de A, comme on l'a indiqué plus haut, et l'intersection de la courbe $\frac{1}{2} A_{\max}$ avec la droite d'abscisse $H \cos \theta$ définit l'ordonnée des deux points qui, sur les deux branches de la courbe K, définissent les fréquences cherchées, dont l'écart en savarts est directement indiqué sur l'axe des abscisses.

Pour les structures cloisonnées, le maximum de A est indépendant de θ; l'intersection de la droite d'abscisse H avec la courbe $\frac{1}{2} A_{\max}$ donne la valeur de $N^2 \cos^2 \theta$, d'où on remonte par la partie (3) de l'abaque, à N^2, qui définit l'horizontale coupant la courbe K aux deux points, dont l'écart en fréquences est la valeur cherchée.

On voit facilement par ces constructions que l'intervalle quadrantal diminue quand θ croît, pour les structures continues et augmente au contraire pour les structures cloisonnées.

7. Emploi des abaques à partir de données expérimentales

Il est parfois nécessaire de déterminer expérimentalement les caractéristiques d'une structure et d'en déduire en particulier le coefficient H de résistivité relative, ou plutôt le produit $H \cos \theta$.

Si le maximum d'absorption (sommet de la courbe de résonance) est obtenu avec une précision suffisante, les graduations en regard de l'axe des abscisses du diagramme (3) donnent immédiatement cette correspondance; deux valeurs de H toutefois restant possibles: le choix entre elles sera fait en se rappelant qu'un orifice assez grand présente une résistivité très faible, et qu'il faut un amortissement assez important par grillages ou produits fibreux dans les cols de résonateurs ou des cols extrèmement fins, pour obtenir une résistivité supérieure à 1. La construction de la courbe d'absorption permet ensuite une vérification.

Les mesures expérimentales seront faites généralement sous incidence normale, ou au moins de valeur connue: on obtiendra ainsi le coefficient H. Si le son est diffus, on aura une première approximation en admettant un angle d'incidence équivalent de 55°.

Il est parfois plus précis, ayant tracé une courbe de résonance, de déterminer H à partir de l'intervalle quadrantal mesuré, car une erreur sur le maximum $A_{\max}$ de la courbe se traduit par une erreur beaucoup plus faible sur la longueur de la courbe à l'amplitude $\frac{1}{2} A_{\max}$. Il suffit alors de placer entre les deux branches de la courbe K (K étant connu) une longueur égale à cet écart en fréquences, au moyen de la graduation en savarts, tracée au bas du diagramme, et reportée sur rhodoïd par exemple.

Si K n'est pas connu, H étant calculé à partir du maximum de la courbe d'absorption, on cherchera quelle est celle des courbes K qui admet entre ses branches l'intervalle quadrantal mesuré, correspondant aux valeurs H (ou $H \cos \theta$) et $\frac{1}{2} A_{\max}$ déjà connues.

8. Vérifications expérimentales

Une étude de résonateurs est en cours, pour le projet d'insonorisation de laboratoires de combustion. Cette étude se base sur l'emploi d'une part d'éléments de petite dimension (20 cm × 20 cm) étudiés sous incidence normale au tube à ondes stationnaires, d'autre part de parois de briques perforées disposées dans une galerie, puis dans une salle réverbérante, sous incidence aléatoire.

Les premiers résultats montrent quelques légères divergences entre les résultats théoriques des formules ci-dessus et les résultats expérimentaux, mais sans que l'écart constaté puisse être gênant pour l'établissement d'un projet. L'emploi des abaques a permis tous les calculs très rapidement, et les résultats de ces mesures d'absorption feront l'objet d'une communication ultérieure.

(Reçu le 14 Fevrier 1957.)

Références

[1] Brillouin, J., Théorie de l'absorption du son par les structures à panneaux perforés. Cahier 31 — Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, Paris, Janvier 1949.

[2] Ingard, U. et Bolt, R. H., Absorption characteristics of acoustic material with perforated facings. J. acoust. Soc. Amer. **23** [1951], 533.

DAS AUSGLEICHSVERHALTEN VON GEIGEN UND SEINE BEZIEHUNG ZU DER RESONANZKURVE

Von W. Lottermoser

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt Braunschweig

Zusammenfassung

Zwei neue mittelmäßige Geigen und zwei hervorragende Stradivari-Geigen wurden am Steg impulsartig bei verschiedenen Frequenzen erregt. Die Einschwingvorgänge verlaufen je nach Lage der Trägerfrequenz zu den Resonanzstellen verschiedenartig. Die Auswertung nach E. Meyer-Helmbold ergibt, daß die Stradivari-Geigen schneller einschwingen als die neuen. Dies wird dadurch erklärt, daß trotz geringerer Dämpfung und daher größeren Wirkungsgrades der altitalienischen Geigen diese eine größere Zahl von Resonanzen haben, die bandfilterartig dicht nebeneinander liegen.

Summary

Two new violins of medium quality and two excellent violins of Stradivarius were excited on the bridge by impulses at several frequencies. The transient phenomena differ according to the relation of the carrier-frequency to the resonances. The interpretation according to E. Meyer-Helmbold shows that the Stradivarius violins have shorter transients than the modern ones. This can be explained by the fact that the old Italian master-pieces have, in spite of a less damping and therefore greater efficiency, resonances lying close together like band-filters.

Sommaire

On a excité par impulsions sur le chevalet, à des fréquences différentes, deux violons modernes de qualité médiocre et deux violons supérieurs de Stradivarius. Les phénomènes transitoires de mise en vibration diffèrent suivant la position de la fréquence porteuse par rapport aux résonances. L'étude faite suivant le procédé de E. Meyer-Helmbold montre que les Stradivarius entrent plus rapidement en vibration que les violons modernes. Cela s'explique du fait que les anciens violons italiens, bien qu'ayant un amortissement plus faible et par conséquent un rendement plus grand, possèdent un nombre plus grand de résonances qui sont situées très près l'une de l'autre à la manière d'un filtre de bande.

1. Problemstellung

Aus Gesprächen mit Geigenbauern und Geigenspielern über die Güte von Geigen wird deutlich, eine wie große Bedeutung der Ansprache einer Geige beizumessen ist. Eine Violine, welche leicht anspricht, bei welcher sich also die Teiltöne beim Anstrich schnell zur vollen Amplitude entwickeln, wird in jedem Fall besser beurteilt als eine solche, die „schwer kommt“. Es ist natürlich vorteilhaft, wenn die Geige in möglichst vielen Tonlagen leicht anspricht, dagegen ungünstig, wenn es eine größere Zahl von Tönen gibt, bei denen die Ansprache mühsam ist. Ganz frei von derartigen Fehlerstellen ist keine Geige, doch kennt der geübte Spieler die Schwächen seines Instruments und sucht sie durch besonderen Bogenstrich auszugleichen.

H. v. Helmholtz [1] teilt in seiner Lehre von den Tonempfindungen Beobachtungen mit, welche in diesem Zusammenhang von größtem Interesse sind. Er studierte die Schwingungsform angestrichener Saiten und fand, daß es schwierig war, stabile Schwingungen über längere Zeit auf einem Monochord zu erzeugen. Die Grundform der Sägezahnschwingung wurde immer wieder unterbrochen und plötzlich auftretende Verschiebungen und Veränderungen der Schwingungsform traten auf. Auf einer Guadagnini-Geige dagegen konnten mit Leichtigkeit ruhig verlaufende, periodische Schwingungen hervorgebracht werden.

In seiner grundlegenden Arbeit über die Ausgleichsvorgänge der Akustik hat H. Backhaus [2] u. a. die Entwicklung der Teiltöne beim Anstrich einer Landolfi-Geige auf der Grundfrequenz a′ = 435 Hz verfolgt. Während sich die Teiltöne der 1. und 2. Ordnung stetig bis zur vollen Amplitude in etwa 100 ms entwickelten, vergrößerten sich die der höheren Ordnungen in mehreren Schwebungen, erreichten jedoch nach etwa 10 bis 20 ms größere Amplituden als die erstgenannten Teiltöne. Beträchtliche Schwankungen der Obertonintensitäten wurden auch während des sogenannten stationären Teils des Bogenanstrichs festgestellt.

Die Resonanzkurve einer Geige zeigt, wie bekannt [3], eine große Zahl von Maxima mehr oder weniger großer Amplitude, Frequenzbreite und -lage.

Je nachdem, ob die Harmonischen der Saitenschwingung auf Maxima oder Minima fallen, werden sie stärker oder schwächer vom Resonanzkörper abgestrahlt.

Die Dämpfungen von Geigenhölzern hat zuerst E. Rohloff, später E. Skudrzyk [4] gemessen, wobei letzterer auf die damit im Zusammenhang stehenden Ausgleichsvorgänge aufmerksam gemacht hat. F. A. Saunders [5] hat das Ausklingen beobachtet und versucht, in Beziehung zur klanglichen Güte zu setzen. J. G. Helmbold [6] hat die Einschwingvorgänge von Lautsprechern gemessen und brachte deren Dauer in eine enge Beziehung zu ihrer Übertragungskurve. Oszillographisch wurden dabei Einschwingvorgänge beim Einschalten von Sinusspannungen verschiedener Frequenz registriert. Zur Auswertung wurden die Hüllkurven zugrunde gelegt und der Einschwingvorgang als praktisch beendet angesehen, sobald die Amplitude in den Bereich von ± 20% des stationären Wertes gelangt war. Die Einschwingzeit wurde als positiv bewertet, wenn sich die Hüllkurve asymptotisch diesem Wert näherte. Wenn aber die Amplitude vorübergehend größere Werte erreichte und sich darauf erst dem stationären näherte, wurde die Einschwingzeit als negativ angesehen. Das Ergebnis zeigte, wie zu erwarten war, daß die Einschwingzeit bei den Resonanzspitzen am längsten, und an den Stellen, wo kein ausgeprägtes Maximum vorhanden ist, am kürzesten ist.

In seiner Einführung in die Akustik gibt F. Trendelenburg [7] einige typische Fälle wieder, aus denen ersichtlich ist, in welcher Weise sich der Einschwingungsvorgang und seine Hüllkurve verändert, wenn die rechteckig geschaltete Anregungsfrequenz f in verschiedenem Verhältnis zu der Resonanzfrequenz f_0 des angeregten Systems steht. Ist $f = f_0$, so wächst die Amplitude mit $(1 - \mathrm{e}^{-\delta t})$ an. Ist $f \neq f_0$, so entwickelt sich die Amplitude nicht kontinuierlich, sondern erreicht vorübergehend größere Werte als im eingeschwungenen Zustand.

Bezeichnet $k(t)$ die äußere, auf das System wirkende sinusförmige Kraft $K(t) = K_0 \sin \omega t$, so lautet bekanntlich die Schwingungsgleichung

$$M \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + R \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + D\,x = K(t)\,,$$

wobei M die Masse, R die Reibungskraft, D die Rückstellkraft des angeregten Systems ist. Die Lösung der Gleichung führt zu

$$A = A_0 \sin(\omega\, t + \varphi) + A' \,\mathrm{e}^{-\delta t} \sin(\omega_0\, t + \psi)\,,$$

d. h. es treten zwei Summanden auf, von denen der erste die Schwingungen im stationären Zustand, der zweite die frei abklingenden Schwingungen mit der Dämpfungskonstante δ und der Eigenfrequenz ω_0 des Systems darstellt. Man erhält den Einschwingvorgang durch Superposition beider Schwingungen nach Amplitude, Frequenz und Phase. F. Vilbig [8] gibt dazu ein Verfahren an, mit dessen Hilfe derartige Vorgänge graphisch ermittelt werden können. Allgemein lassen sich Probleme dieser Art bekanntlich durch die Laplace-Transformation behandeln, worüber ein ausführliches Schrifttum [9] vorliegt.

In dieser Arbeit werden einige Aufnahmen gebracht, an Hand derer das Ausgleichsverhalten von Geigen diskutiert wird.

2. Die Resonanzeigenschaften der Geige

Der nach Form und Aufbau komplizierte Körper der Geige läßt genauere Berechnungen der Frequenzlagen und Dämpfungen der Resonanzen nicht zu. Auf experimentellem Weg hat man ermittelt, daß solche teils vom Hohlraum, teils von den Platteneigenschwingungen herrühren, wobei komplizierend hinzukommt, daß die Decke zur Verstärkung mit dem Baßbalken versehen ist und daß sie mit dem Boden durch den unsymmetrisch eingespannten Stimmstock gekoppelt ist. Außerdem wird durch die Saiten über den Steg ein statischer Druck auf die Decke ausgeübt, wodurch sich deren Resonanzen verlagern. Decke und Boden sind am Rand durch die Zargen und Eckklötzchen eingespannt, wobei aber die Zargen selbst keine Knoten der Schwingungszustände bilden. Durch frühere Versuche [10] weiß man beispielsweise, daß die sogenannte Hohlraumresonanz durch das Volumen des Hohlraums und seiner Öffnungen in Gestalt der beiden f-Löcher hervorgerufen wird, und daß mit dem Hohlraum die Platten, besonders der Boden eng gekoppelt ist. Läßt man nämlich den Stimmstock weg, so fehlt das Maximum der Hohlraumresonanz nahezu, ein Zeichen dafür, daß dieses Maximum nur dann entstehen kann, wenn der Boden frei mitschwingt. Deswegen sollte er im fraglichen Frequenzgebiet eine oder besser mehrere Resonanzen besitzen, damit das gewünschte Maximum der Abstrahlung zustande kommt.

3. Meßanordnung

Ein Schwebungssummer wurde kurzzeitig an ein Anregungssystem R 12 b (Neumann) gelegt, wodurch impulsartig Wechselströme mit konstanter Amplitude aber verschiedener Frequenz die Mitte des Geigensteges in Richtung der Saitenschwingungen erregten. Mit dem gleichen Schalter wurde ein Kathodenstrahloszillograph gesteuert, so daß dessen Leuchtpunkt gleichzeitig von links nach rechts abgelenkt wurde, während auf das andere Plattenpaar die verstärkten Mikrophonspannungen gegeben wurden.

Zur Schallaufnahme diente ein in 15 cm Abstand unter 45° zur Geigenebene aufgestelltes Mikrophon. Die Saiten waren durch eingeschobene Gummistücke untereinander abgedämpft.

Die angewandte Impulsmethode liefert die Anregungsfunktionen ohne Berücksichtigung der Unstabilitäten des normalen Bogenanstrichs. Sie gewährt außerdem den Vorteil, daß Raumeinflüsse nahezu ausgeschaltet sind.

In bekannter Weise [11] wurde zunächst mit Pegelschreiber kontinuierlich die Resonanzkurve der zu untersuchenden Geige (Bild 1 a – d) aufgenommen und darauf an einigen ausgezeichneten Punkten: Flanken, Maxima und Minima der Resonanzkurve die Einschwingvorgänge registriert. Zur Prüfung gelangten zwei mäßige moderne Violinen und zwei klanglich hervorragende Geigen von Stradivarius.

4. Meßergebnisse

Die aufgezeichneten Einschwingvorgänge (Bild 2) lassen sich nach gewissen Typen ordnen:

1. Wenn $f = f_0$ ist, nimmt die Amplitude kontinuierlich, wie oben angegeben, bis zu ihrem stationären Wert zu.
2. Wenn f wenig kleiner oder größer als f_0 ist, wobei bei f_0 vorwiegend eine Resonanzspitze vorhanden ist, wächst die Amplitude über ein Maximum und darauffolgendes Minimum bis zu einem stationären Wert, der kleiner als der des Maximums ist. Die Erscheinung folgt, wie oben angegeben, aus der Überlagerung der abklingenden Systemschwingung mit der stationären. Bei geringer Dämpfung des angeregten Systems ist die Modulation besonders deutlich.
3. Mehrere aufeinanderfolgende Maxima und Minima im Einschwingvorgang deuten auf die Anregung mehrerer schwach gedämpfter benachbarter Resonanzen (elektrisches Analogon; mehrgliedrige gekoppelte Schwingungskreise).
4. Befindet sich f in einem Minimum zwischen zwei stärkeren Resonanzen $(f_0' < f < f_0)$, so ist die Anfangsamplitude am größten. Der Einschwingvorgang verläuft in dem Fall invers, die Schwingung klingt von einem größten Anfangswert schwebungsartig bis zu einer relativ kleinen stationären Amplitude ab. Die Energie pendelt dabei zwischen der einen und anderen Resonanz hin und her.

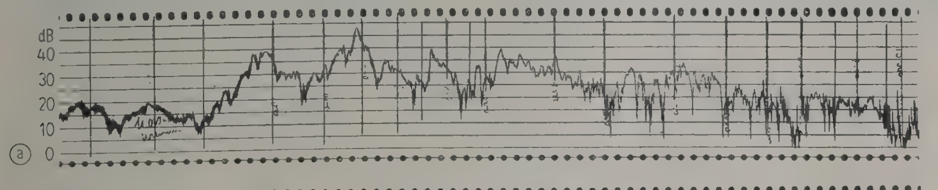


Bild 1. Resonanzkurven der untersuchten Geigen;
(a) mäßige Geige, bezeichnet mit PTB-1,
(b) mäßige Geige, bezeichnet mit PTB-2,
(c) Stradivarius-Geige von 1694,
(d) Stradivarius-Geige von 1721.

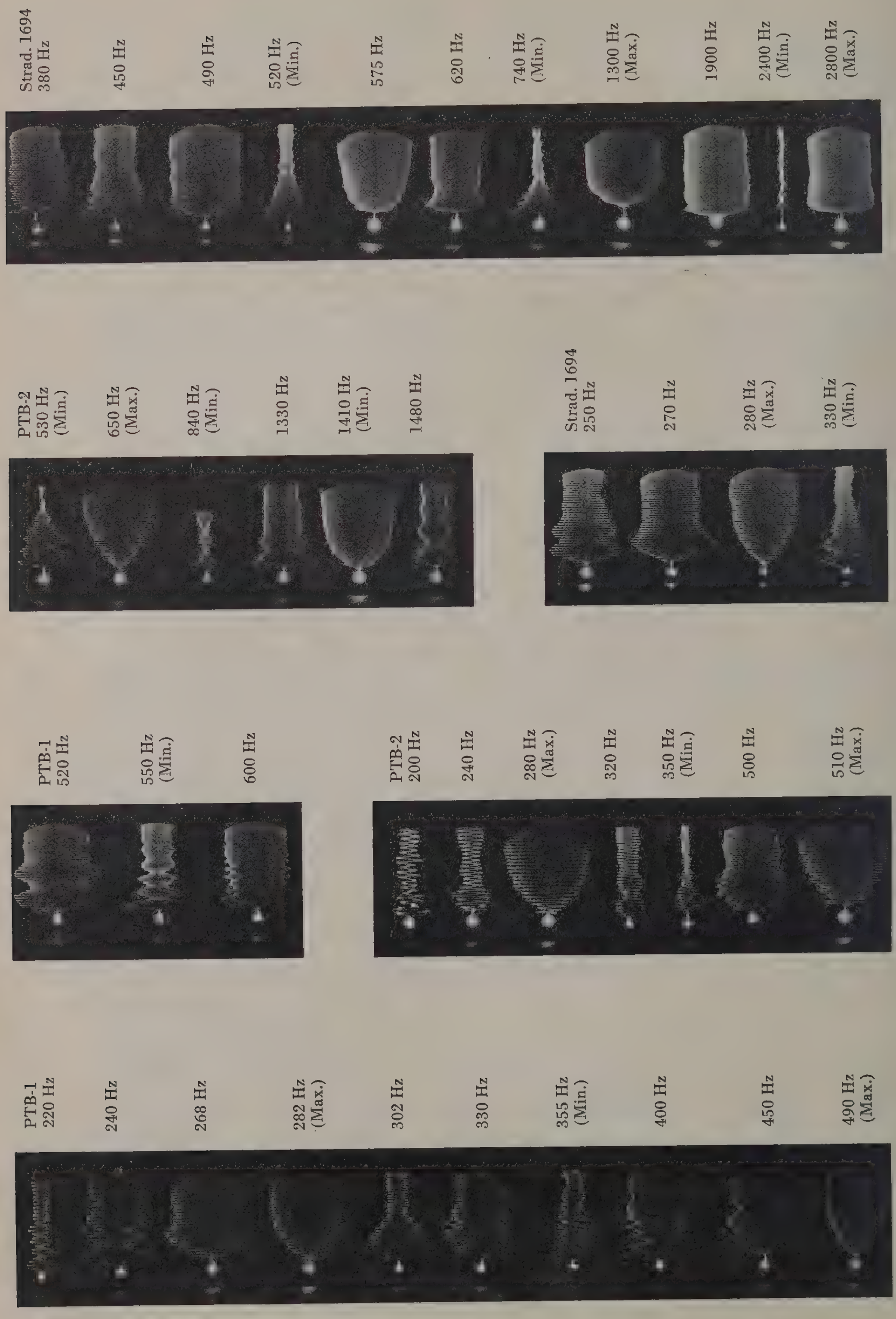


Bild 2. Ausgleichsvorgänge bei verschiedenen Frequenzen. Einschaltung von sinusförmiger Erregung: links bei den Geigen PTB-1 und 2, rechts bei der Stradivarius-Geige von 1694.

5. Falls f in einem Frequenzgebiet liegt, in dem sich mehrere Resonanzen zu einem breiten Resonanzbereich überlagern, so wird der stationäre Amplitudenwert in kürzester Zeit (in wenigen Perioden) erreicht.

Auf die in diesem Zusammenhang wichtigen Berechnungen von K. W. Wagner [9] über die spektrale Darstellung der rechteckförmig eingeschalteten Sinus- bzw. Kosinusschwingung soll hier nur hingewiesen werden. Es läßt sich daraus entnehmen, daß im kontinuierlichen Spektrum eines solchen Vorgangs die Amplituden $A(\omega)$ der dicht benachbarten Teiltöne mit wachsender Frequenz ω bis zu dem Maximum der tatsächlich geschalteten Frequenz zunehmen

$$A(\omega) = \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2}$$

(Ω geschaltete Frequenz). Darüber werden sie wieder kleiner. Ein solches Spektrum ist nach Betrag und Phase mit der Übertragungsfunktion des Resonanzsystems zu bewerten, woraus das resultierende Spektrum und der zeitliche Verlauf des Ausgleichsvorganges durch Laplace-Transformation abgeleitet werden kann.

Zunächst wurden aus der Resonanzkurve der Geige einige Frequenzen f_0 der Resonanzmaxima ermittelt. Sie sind in Tabelle I zusammengestellt. Aus den zugehörigen Einschwingvorgängen wurden die Dämpfungen in Form des Dekrements

$$d = \frac{1}{p-q} \ln \frac{x_p}{x_q}$$

und der Dämpfungskonstante $\delta = f\,d$ ausgewertet. (Der Verlustfaktor des E-Moduls, der in der Arbeit von Skudrzyk angeführt ist, beträgt $\eta = d/\pi$.)

Die gewonnenen Werte erfassen die mittlere innere Dämpfung sowie die Strahlungsdämpfung. Sie beziehen sich auf die Transversal- und Biegeschwingungen, welche die Platten der Geige ausführen. Während die von Skudrzyk [4] ermittelten Werte für Klangholz zwischen $d = 0{,}015$ bei tiefen und 0,080 bei hohen Frequenzen liegen, ist das hier gemessene Verhalten weniger eindeutig. Ähnlich ist nur der Befund, daß die Dämpfungen der alten Geigen unterhalb derjenigen der neuen liegen. Die Tendenz des Dämpfungsanstiegs mit wachsender Frequenz wird über ungefähr 700 Hz sichtbar. Darunter tritt ein gegenläufiges Verhalten auf; die Dämpfung wird mit abnehmender Frequenz größer. Es wird vermutet, daß dafür die größere Strahlungsdämpfung infolge der besseren Abstrahlung bei weniger unterteilten Schwingungszuständen verantwortlich zu machen ist.

Es sei noch bemerkt, daß sich die Größe der Dämpfung während des Einschwingens ändert. Bei kleiner Amplitude ist das Dekrement kleiner als bei größerer Amplitude, die zeitliche Amplitudenzunahme erfolgt also nicht streng nach einer e-Funktion.

Um mit den erwähnten Lautsprechermessungen von Helmbold [6] vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, wurden die Ausgleichsvorgänge auf die oben beschriebene Weise ausgewertet. Die Ergebnisse sind in Bild 3 zusammengestellt. Die Einschwingzeit wurde dabei in Zahl der Perioden angegeben. Sie ist

Tabelle I.
Dämpfungswerte (Dekrement d und Dämpfungsfaktor δ) der untersuchten Geigen.

Frequenz Hz	Dämpfungen							
	PTB-1		PTB-2		Strad. 1694		Strad. 1721	
	d	δ	d	δ	d	δ	d	δ
282	0,17	49						
490	0,09	44						
740	0,035	26						
1100	0,099	109						
1500	0,116	174						
280			0,288	81				
510			0,159	86				
650			0,093	60,5				
1410			0,073	102				
280					0,128	36		
575					0,063	36		
650					0,082	53		
1300					0,051	66,4		
260							0,148	28,5
580							0,053	30,7
760							0,041	31,2
1460							0,049	71,6

mit max. 50 Perioden wesentlich länger als die von Lautsprechern, bei denen nur bis drei gemessen wurden. Zur frequenz- und phasentreuen Übertragung eines großen Frequenzbandes ist natürlich die Geige nicht geeignet.

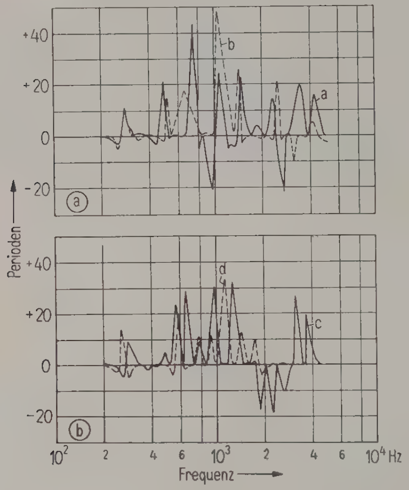


Bild 3. Dauer des Einschwingens in Perioden in Abhängigkeit von der Frequenz;
(a) bei den Geigen PTB-1 und 2,
(b) bei den Stradivari-Geigen von 1694 und 1721.

Die Auswertung zeigt ferner, daß die Einschwingzeiten der Stradivari-Geigen deutlich kürzer als die der neuen Instrumente sind, trotzdem man entsprechend der kleineren Dämpfung der alten Geigen längere Einschwingzeiten bekommen müßte. Die Erscheinung kann dadurch erklärt werden, daß man annimmt, das schnellere Einschwingen komme durch das Zusammenwirken mehrerer bandfilterartig gekoppelter Resonanzsysteme zustande. Diese sind wohl einzeln weniger stark gedämpft, indessen führt die Überlagerung der beteiligten Resonanzen zu kürzeren Einschwingzeiten, woraus sich allerdings keine e-Funktion für den Einschwingvorgang ergibt, wie es an sich bei Auswertung der Dämpfung vorausgesetzt wurde.

An den Stellen, an denen die Resonanzkurve ein Maximum zeigt, ist die Einschwingzeit am längsten. Man sieht, daß derartige Maxima bei den neuen Geigen hoch sind und relativ weit auseinanderliegen. Bei den Stradivari-Geigen liegen solche Maxima dichter und sind weniger hoch.

Diese Unterschiede sind typisch und dürften wesentlich zur größeren Klanggüte der Stradivari-Geigen beitragen.

Bei 750 Hz zeigt die PTB-1-Geige das erwartete Verhalten: Hier wurde eine außergewöhnliche geringe Dämpfung gemessen, der entsprechend dem normalen Zusammenhang eine besonders lange Einschwingzeit entspricht. Die Resonanzkurve zeigt an dieser Stelle eine besonders scharfe Resonanz mit steilem Abfall nach tieferen Frequenzen.

So ist es erklärlich, daß es für die klangliche Güte einer Geige günstig ist, wenn mehrere schwach gedämpfte Resonatoren benachbarter Frequenzlage vorhanden sind. An solchen Stellen ist die Ansprache rasch beendet und die Abstrahlung, d. h. der Wirkungsgrad relativ gut. Bei einzelnen schmalen Resonanzen kann wohl der Wirkungsgrad auf dem Maximum noch besser sein, indessen ist die Ansprache benachteiligt. Der Wirkungsgrad ist besonders klein, wenn die gespielte Frequenz auf ein Minimum der Resonanzkurve fällt. Sind die benachbarten Resonanzspitzen so weit voneinander entfernt, daß die auftretende Schwebungsfrequenz über etwa 20 Hz liegt, so treten schnelle Modulationen auf und der Klangeinsatz wirkt rauh. Das Vorhandensein mehrerer tief und breit eingeschnittener Minima kann daher allgemein als ungünstig angesehen werden. Auch aus diesem Grund dürfte es sich empfehlen, die Resonanzkurven in logarithmischem Amplitudenmaßstab aufzuzeichnen, weil bei linearem über die Minimastellen nicht viel ausgesagt werden kann.

Bei der Diskussion von Resonanzkurven ist daher auf folgende Punkte zu achten:

a) Breite und Frequenzlage der Resonanzmaxima,
b) Vorkommen von bandfilterartigen Resonanzgebieten,
c) Breite und Frequenzlage der Minima.

Es kommt natürlich selten vor, daß die harmonisch liegenden Teiltöne der Saitenschwingung alle auf Resonanzmaxima fallen. Meist werden nur einige Teiltöne eines Klanges durch Resonanz verstärkt. Solche erscheinen dann im Einschwingvorgang relativ spät; andere Obertöne, die auf Flanken, auf Resonanzgebiete oder Minima fallen, sind früher aufgebaut. Durch diese verschiedene zeitliche Entwicklung der Klangkomponenten wechselt daher auch der subjektive Eindruck des Einschwingvorganges von Ton zu Ton, wie auch im stationären Vorgang die Klangfarbe von Ton zu Ton wechselt. Sind nun aber, wie oben bei b) angegeben, Resonanzgebiete vorhanden, so sind die Änderungen hinsichtlich des Klangaufbaues und des stationären Vorganges geringer, die Klangfarbe ist bei Grundtonänderung weniger sprunghaften Änderungen unterworfen. Solche Erscheinungen konnten bei den Stradivari-Geigen beobachtet werden. Wenig günstig ist es, wenn mehrere Teiltöne auf Minima der Resonanzkurve fallen. Solche Klänge wirken ausgesprochen matt.

Auf einige Einzelheiten der Resonanzkurven soll noch hingewiesen werden: Die Stradivari-Geige von

1721 besitzt ein ausgesprochen starkes und breites Resonanzgebiet bei etwa 280 Hz. Mißt man die Frequenzbreite dieser Resonanz (Hohlraum) bei den verschiedenen Geigen bei dem willkürlich gewählten Pegel von 30 dB, so ergeben sich folgende Grenzen bei PTB-1: 250 bis 270 Hz; bei PTB-2: 270 bis 290 Hz; bei Stradivari 1721: 245 bis 310 Hz und bei Stradivari 1694: 265 bis 330 Hz, d. h., die so ermittelte Resonanzbreite ist also bei Stradivari mit 65 Hz mehr als dreimal so groß als bei den modernen Instrumenten. Aber auch die Höhe der Spitzenwerte ist deutlich verschieden. Bei gleicher Anregungsenergie liegt diese bei den altitalienischen Geigen bei 46 und 41 dB gegenüber 39 und 37 dB bei den Vergleichsgeigen. Die Grundtöne auf der g^0-Saite von Stradivari 1721 sind daher außergewöhnlich intensiv und sprechen in relativ kurzer Zeit an. Von Künstlern wird diese Geige wegen ihrer Fülle und Tragfähigkeit außerordentlich geschätzt. Wie auch früher von H. Meinel [2] angegeben wurde, kommt den Grundtönen einer Geige eine besondere Bedeutung zu. Auf die interessante tiefere Resonanz bei 150 Hz, welche durch das System Saitenhalter + 4 Saiten zustande kommt, sei besonders hingewiesen.

Es fällt weiterhin auf, daß bei beiden Geigen der Frequenzbereich zwischen der Hohlraumresonanz und den Hauptmaxima außergewöhnlich gleichmäßig und von mittlerer Intensität ist. Minima treten auffallend wenig auf und sind weder breit noch tief eingeschnitten. So sprechen die Teiltöne 1. und 2. Ordnung in diesem Bereich schnell an und haben eine ausreichende Intensität. Unterschiedlich ist der Frequenzbereich zwischen 500 und 1000 Hz ausgebildet. Während die Stradivari 1721 ein einziges starkes Maximum bei 580 Hz besitzt, hat die Stradivari 1694 deren zwei bei 580 und 660 Hz. Besonders bemerkenswert ist dabei, daß bei derselben Geige vor zwei Jahren nur *ein* Hauptmaximum bei der tieferen Frequenz gemessen wurde. Leider lassen sich die Gründe für dies Verhalten nicht mehr rekonstruieren; es dürfte aber auf Grund der laufenden Messung anderer Geigen feststehen, daß sich die Höhe der Resonanzen in Abhängigkeit vom Wetter verändert. Hinsichtlich des Einschwingens dürfte die Aufspaltung der Hauptresonanz nicht ungünstig sein. Im Klange wirkt sich diese Eigenschaft in der Richtung aus, daß die Geige etwas heller als die von 1721 zu klingen scheint. In der gleichen Richtung wirkt das Resonanzgebiet von etwa 820 bis 1000 Hz der Stradivari von 1694, das bei der Geige von 1721 zwar unten stärker aber oben etwas schwächer ausgebildet ist. Abgesehen davon ist aber bei beiden Geigen die Betonung des „o“- und „a“-Formanten sichtbar. Im Bereich zwischen 1000 und 2000 Hz fallen bei der Stradivari von 1721 zwei breite und tiefe Minima bei 1130 und 1600 Hz auf. Trifft der 2. Teilton auf das untere Minimum, so liegt der Grundton fast auf dem Hauptmaximum. Das bedeutet, daß die Lücke im Teiltonaufbau praktisch kompensiert ist. Der 3. Teilton fällt ebenfalls auf ein Maximum, der Klang wird also voll und kräftig wirken. Faßt man 1130 Hz als 3. Teilton auf, so liegt der 2. auf der unteren Flanke eines Maximums, spricht also rasch an, der erste liegt auf der unteren Kante eines Resonanzgebietes, ist also ebenfalls schnell aufgebaut. Der 4. Teilton liegt auf der oberen Flanke eines Resonanzgebietes; für ihn gilt dasselbe. Man findet weiterhin bei dem 1600-Hz-Minimum, daß es beim Auftreffen des 2. Teiltones wegen des starken Grundtons und seines raschen Aufbaus unwirksam ist. Wenn der 3. Teilton auf das Minimum fällt, ist der zweite Teilton relativ stark und der erste liegt auf der unteren Flanke der Hauptresonanz. Der 4. Teilton ist bei 2130 Hz ebenfalls stark. Auch wenn der 4., 5., 6. usw. Teilton auf dieses Minimum fällt, sind soviel kompensierende Maxima bei den anderen harmonischen vorhanden, daß sich die Lücke nicht schädlich auswirkt. Außerdem ist bekannt, daß gute Geigen bei dieser Frequenz eine Minimumstelle besitzen sollen, damit die Gefahr des Näselns vermieden wird. Bei der Stradivari von 1694 sind die analogen Minima etwas verschoben und weniger breit (1150 und 1700 Hz). Wegen der starken und dichten Resonanzstellen bei tieferen Frequenzen ist aber vermieden, daß sich diese Lücken schädlich auswirken.

Zählt man vergleichsweise alle Resonanzmaxima der vier untersuchten Geigen über 30 dB zusammen, so bekommt man bei PTB-1 und 2 je 11 Resonanzen, bei Stradivari 1721: 21 und Stradivari 1694: 17, wobei die obere Frequenzgrenze bei etwa 3500 Hz liegt. Der Übertragungsbereich ist also entsprechend Bild 3 bei wertvollen Geigen mit stärkeren und dichter liegenden Resonanzen besetzt.

Die Partien über etwa 2000 Hz nach oben wirken sich besonders auf den sogenannten Glanz der Geige entsprechend der Helligkeit des „e“- und „i“-Formanten aus. Bei der Stradivari 1694 sind auffallend starke, relativ breite Resonanzen zwischen 1900 und 4000 Hz vorhanden, darüber hinaus aber praktisch nur noch geringfügige. Diese Violine wirkt daher besonders hell und strahlend, doch nie scharf. Als noch besser wird allerdings die Stradivari von 1721 bewertet, deren Maxima im fraglichen Bereich weniger dicht liegen und weniger hoch sind. Mit großen Lücken ist besonders der Bereich zwischen 2000 und 3000 Hz versehen, während zwischen 3000 und 4000 Hz stärkere Spitzen zu erkennen sind. Diese Eigenschaft bewirkt offenbar, daß der Stradivari 1721 von Kennern der besonders „milde Glanz“

nachgerühmt wird, welcher den Spitzeninstrumenten neben ihrer Sonorität besonders eigen ist.

Entsprechende Auswertungen lassen sich an modernen Vergleichsinstrumenten anstellen. Es sei hier lediglich bei PTB-1, welche als wenig gut anzusehen ist, auf das starke Näseln aufmerksam gemacht, das durch das ausgedehnte Resonanzgebiet um 1500 Hz und eine entsprechend ungünstige Intensitätsverteilung der anderen Teiltöne hervorgerufen wird. Wenn nämlich der 3. Teilton auf das Maximum bei 1500 Hz fällt, liegt der 2. Teilton bei 1000 Hz, ist nach der Resonanzkurve demnach schwach, der 1. ist, weil er nahezu auf dem Hauptmaixmum liegt, stark, der 4. ist schwach. Bei solcher Zusammensetzung (ohne stärkere Oktave) ist die nasale Wirkung besonders groß. Wenn der 2. Teilton auf 1500 Hz fällt, ist keine ungünstige Wirkung zu befürchten, ebenso nicht bei dem 4., 5. und 6., bei letzterem sicher nicht, weil der 2. und der 3. Teilton auf Resonanzen der Kurve fallen.

Bei der Anregung unterhalb der Hohlraumresonanz (Bild 2) fällt auf, ein wie starker Klirrfaktor [12] in Erscheinung tritt. Er ist dadurch erklärlich, daß im Impulsvorgang die höheren Harmonischen angestoßen werden und sich dadurch, daß in diesen Frequenzlagen eine erheblich größere Resonanz vorhanden ist als beim Grundton, stark bemerkbar machen.

5. Schluß

Durch die dargestellten Untersuchungen lassen sich die im Eingang erwähnten Beobachtungen von H. von Helmholtz erklären. Die Unstabilitäten des Bogenanstrichs verursachen sowohl Amplituden- wie Frequenzschwankungen der Saitenschwingung. Besitzt der Resonanzkörper nur wenig Resonanzen relativ geringer Dämpfung und dazwischen mehrere Minima, so werden auch geringe Frequenzschwankungen in erhebliche Amplitudenschwankungen umgesetzt. Das System der Saite arbeitet zeitweise auf Resonanz, zeitweise auf ein Minimum, woraus folgt, daß die Phasenlage der Schwingung immer wieder wechselt, es demnach schwierig ist, eine stabile Schwingung zu erzeugen. Wenn dagegen der Resonanzkörper eine größere Zahl von dicht benachbarten Resonanzen ohne stärkere Minima besitzt, so wirken sich die Unstabilitäten des Bogenanstrichs wesentlich geringer aus. Bei geringen Veränderungen der Grundfrequenz ändern sich die Resonanzbedingungen nur wenig, es ist also möglich, auch bei Frequenzänderung stabile Schwingungen aufrechtzuerhalten.

Mit Hilfe der dargestellten Methode läßt sich also die Güte einer Geige von dem Gesichtspunkt der Ansprechfähigkeit, also derjenigen Eigenschaft, welche für den Spieler von besonderer Wichtigkeit ist, begründen.

Der Verfasser dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Bereitstellung von Mitteln für Geigenuntersuchungen, Herrn Prof. Dr.-Ing. Lutz, Technische Hochschule, Braunschweig, für die Vermittlung der beiden Stradivari-Geigen.

Den Herren Kalke und Simon danke ich für ihre Hilfe bei den Messungen.

(Eingegangen am 6. Juni 1957.)

Schrifttum

[1] von Helmholtz, H., Die Lehre von den Tonempfindungen, 5. Aufl. F. Vieweg, Braunschweig 1896, S. 145.

[2] Backhaus, H., Z. tech. Phys. **13** [1932], 31.

[3] Backhaus, H., Akust. Z. **1** [1936], 179. Meinel, H., Akust. Z. **2** [1937], 22, 62; **4** [1939], 89; **5** [1940], 124 usw. Siehe auch die zusammenfassende Darstellung in O. Möckel und F. Winckel, Die Kunst des Geigenbaus. Verlag B. Fr. Voigt, Berlin-Steglitz 1954.

[4] Rohloff, E., Z. Phys. **117** [1941], 64; Z. tech. Phys. **22** [1941], 110. Skudrzyk, E., Acustica **4** [1954], 252.

[5] Saunders, F. A., J. acoust. Soc. Amer. **9** [1937], 81.

[6] Helmbold, J. G., Akust. Z. **2** [1937], 256; s. a. Meyer, E., Acustica **4** [1954], 53.

[7] Trendelenburg, F., Einführung in die Akustik, 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin 1950, S. 25.

[8] Vilbig, F., Lehrbuch der Hochfrequenztechnik. Akad. Verlagsges., Leipzig 1953.

[9] Wagner, K. W., Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation, J. A. Barth, Leipzig 1950. Wagner. K. W., Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen. Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1947. Doetsch, G., Handbuch der Laplace-Transformation, Band 1 bis 3. Verlag Birkhäuser, Basel/Stuttgart 1950-56.

[10] Backhaus, H. und Weymann, G., Akust. Z. **4** [1939], 302.

[11] Lottermoser, W., Acustica, erscheint demnächst.

[12] Kurz, H., Acustica **3** [1953], Beiheft 1, 148.

OBLIQUE AIR-TO-GROUND SOUND PROPAGATION OVER BUILDINGS

by P. H. Parkin and W. E. Scholes

Department of Scientific and Industrial Research, Building Research Station, Garston, Watford, Herts

Summary

The propagation sideways to the ground of the sound emitted by helicopters has been investigated in a built-up area. Over the horizontal distance covered (about 920 m (3 000 ft) it was found (a) that the attenuation (i. e. all losses in excess of the inverse square reduction) at frequencies up to 1000 c/s was small and independent of the weather for helicopter heights of greater than about 100 m (300 ft) ; and (b) that at lower heights, the attenuation increased considerably.

Sommaire

On a étudié dans une zone urbaine, comment le son émis par un hélicoptère se propageait obliquement vers le sol. La portée horizontale était de l'ordre de 920 m; lorsque l'altitude de l'hélicoptère est supérieure à 100 m environ, l'affaiblissement qui vient s'ajouter à la variation en raison de l'inverse du carré de la distance est faible pour des fréquences $<$ 1000 Hz, et ne dépend pas des conditions atmosphériques. Pour de plus faibles altitudes, l'affaiblissement augmente très notablement.

Zusammenfassung

Es wurde in bebautem Gelände die Ausbreitung der Geräusche von Hubschraubern über dem Erdboden untersucht. In dem beobachteten Bereich (Horizontalentfernung bis ca. 920 m) ergab sich: a) Die Dämpfung (d. h. alle Verluste, die über das quadratische Abnahmegesetz hinausgehen) ist klein für Frequenzen bis 1 kHz und unabhängig vom Wetter für Flughöhen größer als etwa 100 m, b) bei geringeren Flughöhen steigt die Dämpfung beträchtlich an.

1. Introduction

A previous investigation [1] had shown that sound propagated vertically downwards from an aircraft in flight was attenuated only by molecular absorption (apart of course from the inverse square reduction). The investigation reported now was concerned with the oblique propagation of sound, i. e. the sound propagated to the ground sideways from an aircraft in flight. It might be expected that such propagation would be affected by wind and temperature gradients, by the presence of the ground and by the molecular absorption. In what follows the effects, if any, of all these factors are combined under the term „attenuation".

The aircraft used were Westland's type S. 55 helicopters, fitted with exhaust silencers. They flew along the line of the River Thames in London, and the sound pressure levels were measured by ten microphones at roof top level (21.5 m (70 ft) to 36.5 m (120 ft) above ground) situated at roughly equal intervals along a line at right angles to the line of flight. Fig. 1 shows the plan of the area and Fig. 2 the section, with the microphone positions and line of flight of the helicopters indicated.

The investigation was in two parts. The first part consisted of measurements on one calm day with a helicopter flying at various heights of between 46 m (150 ft) and 305 m (1 000 ft) relative to the mean height of the microphones. The objects were to determine the directivity of the helicopter as a noise source and to investigate the oblique attenuation as a function of height. The second part was spread over 28 days throughout the period December of one year to May of the following year, using identical helicopters which were engaged in regular passenger service between the centre of London and London Airport. These helicopters flew at heights of between 105 m (340 ft) and 230 m (750 ft) all relative to the microphones, with an average value of 160 m (520 ft). The object was to investigate the effect of the weather on the attenuation.

2. Technique

The ten microphones on stands 1.5 m (5 ft) high were placed on the highest accessible positions on the buildings. (All the microphones except the first were on flat roofs; the first had behind it a pitched roof, see Fig. 2). They were protected by plastic covers and windshields, which had no effect on their sensitivities at frequencies up to 1 000 c/s, and little effect between 1 000 and 2 000 c/s. After amplification the signals were fed via telephone land-lines to

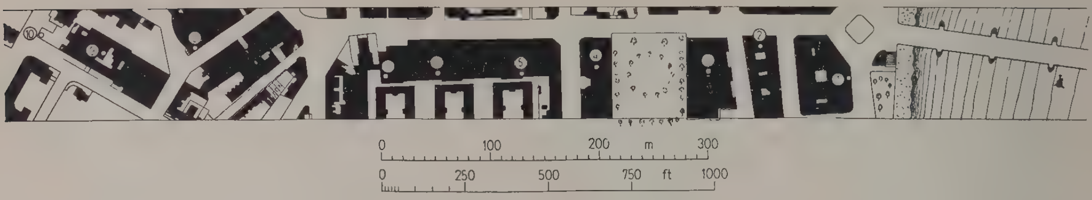


Fig. 1. Plan of microphone layout.

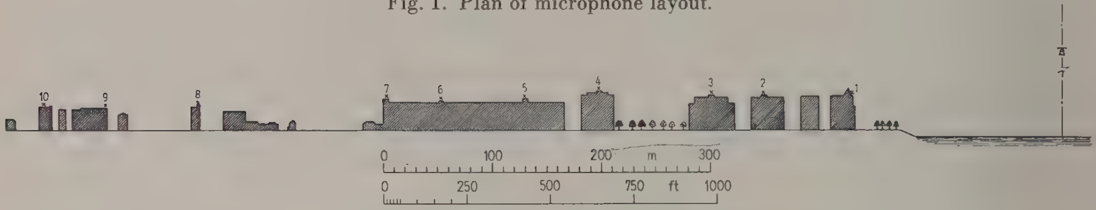


Fig. 2. Section of microphone layout.

a central control room where they were recorded on ten tape-recorder channels. An overall electrical calibration was made every day.

The heliocopters flew nominally along the centre of the river, and their position in space and in time relative to the recordings was determined by a calibrated camera. In order to avoid interference with the recordings at the critical moments when a helicopter was opposite the line of microphones, the indicating marks on the tapes (a short circuit of microphone signals) were delayed automatically until 10 seconds after the photograph.

The recordings were replayed through octave band-pass filters onto a level recorder set at a writing speed of 50 dB per second. From the short circuiting marks and by allowing for the time taken for the sound to travel, a point on the trace could be determined corresponding to the time of arrival at the microphone of the sound emitted by the helicopter when it was at right angles to the line of microphones. The level recorder traces fluctuated rapidly by about ± 4 dB, and the sound pressure level was taken from the value of a smooth line drawn through these fluctuations averaged over an interval of about ± 1 second.

In the lowest octave (37 – 75 c/s) the back-ground noise at most of the microphone positions was as great or greater than the helicopter sound, so no measurements were possible in this band. The highest octave measured was 1 200 – 2 400 c/s; the plastic covers prevented measurements at higher frequencies, and in any case it was expected that the molecular absorption would predominate.

3. Analysis of results

3.1. Directivity of source

The directivity pattern of the helicopter noise source in the plane at right angles to the line of flight will obviously affect the measured attenuation, and although the two effects – directivity and true attenuation – can not be completely separated it is thought that the technique here described was sufficiently accurate.

On a day when the weather was calm the helicopter flew at heights (relative to the microphones) of between 46 m (150 ft) and 305 m (1 000 ft). The relative sound pressure levels, after correction for the inverse square law, at the first three microphone positions were plotted as a function of elevation of the helicopter with respect to each microphone, the two directions of flight being plotted separately. For example, Fig. 3 a – c shows the results for the three microphones for the 300 to 600 c/s octave. There is of course no reason why the directivity should be a linear function of angle, but the results do not justify any more accurate evaluation, so the directivities are summarised in Table I in terms of decibels per degree.

It is seen that at all frequencies the results for microphones 2 and 3 were similar but were from two to four times as great as the results for microphone 1. Now microphone 1 was on a ledge with a large roof sloping at about 60° rising above and behind it, and it is suspected that the reflections from this roof were responsible for the differences. Because of this the results from microphone 1 have been omitted from the directivity calculations, and the results from microphones 2 and 3 have been averaged.

For microphones 2 and 3 the differences between the directivities on the port and starboard sides were probably due to the exhaust being on one side. However, the maximum difference between the two sides is 0.05 dB per degree (in the 1 200 – 2 400 c/s octave). It is more convenient when analysing the other results not to have to distinguish between the

Table I. Directivity of source; dB per degree.

Octave band c/s	Microphone 1		Microphone 2		Microphone 3	
	Port	Starboard	Port	Starboard	Port	Starboard
75— 150	0.06	0.08	0.12	0.19	0.13	0.16
150— 300	0.04	0.06	0.16	0.18	0.10	0.16
300— 600	0.06	0.04	0.14	0.14	0.12	0.12
600—1200	0.02	0.02	0.08	0.08	0.06	0.06
1200—2400	0.06	0.06	0.16	0.08	0.14	0.12

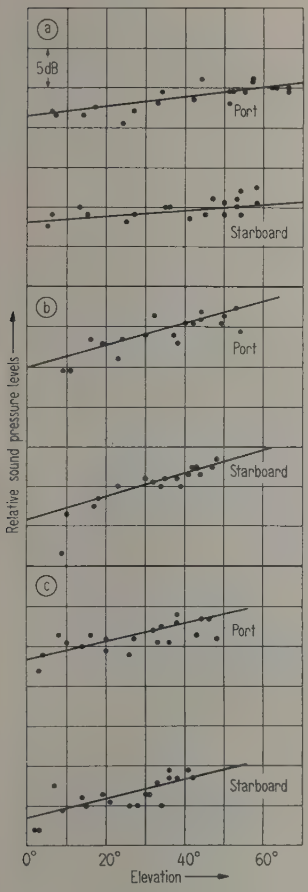


Fig. 3. Relative sound pressure levels as a function of elevation of helicopter (300 to 600 c/s); (a) Microphone No. 1, (b) Microphone No. 2, (c) Microphone No. 3.

two directions of flight. The error in the subsequent calculations of attenuation introduced by the difference in the directivity between port and starboard sides will be greatest when the helicopter was at its geatest height, but even then the error amounts to less than ±1.5 dB per km (±0.5 dB per 1 000 ft) for this 1 200 – 2 400 c/s octave, and for other octaves and lower heights the error is smaller still. Thus, in the further analyses no distinction is made between the two directions of flight.

3.2. *Variation of attenuation with weather*

The average number of measured flights per day for the 28 days throughout the six month period was 5.5. The results for each day have been averaged because the weather conditions, on these days, did not change appreciably between flights.

Fig. 4 shows a typical plot of the attenuations at the ten microphone positions for the 600 to 1 200 c/s octave on one of the days. The values have been corrected for the inverse square law and for the directivity of the source. While any attenuation due to the ground surface, or to any other cause, will not necessarily be a linear function of horizontal distance, the results obtained in these experiments justified the assumption made in the analyses that the attenuation *could* be treated as a linear function, at least over the total distance of about 920 m (3 000 ft) covered by the line of microphones. Accordingly, the attenuation (in dB per km (dB per 1 000 ft)) has been taken from regression lines calculated for each day.

For example, for Fig. 4 the slope of the regression line was 5 dB per km (1.5 dB per 1 000 ft).

The average attenuations for all the 28 days, and the standard deviations and the ranges for the five octave bands are given in Table II, and graphically in Fig. 5.

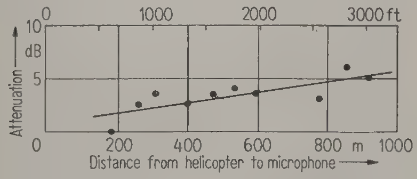


Fig. 4. Typical plot of excess attenuation.

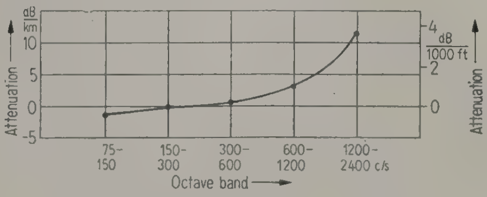


Fig. 5. Average attenuation over 28 days.

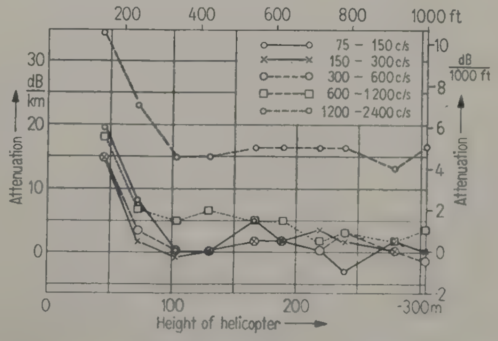


Fig. 6. Variation of attenuation with height of helicopter.

Table II.
Attenuations in dB per km (dB per 1000 ft).

Octave band c/s	Average	Standard deviation	Range	
75— 150	− 0.8 (− 0.25)	± 3 (± 1)	− 6.5 to + 3.3	(− 2 to + 1)
150— 300	0 (0)	± 3 (± 1)	− 3.3 to + 6.5	(− 1 to + 2)
300— 600	+ 0.7 (+ 0.2)	± 3 (± 1)	− 3.3 to + 8.5	(− 1 to + 2.5)
600—1200	+ 3.3 (+ 1)	± 3 (± 1)	− 5 to + 8.5	(1.5 to + 2.5)
1200—2400	+ 11.5 (+ 3.5)	± 3 (± 1)	+ 6.5 to + 13	(+ 2 to + 4)

3.3. *Variation of attenuation with height of helicopter*

On a calm day the helicopter flew at heights of between 46 m (150 ft) and 305 m (1 000 ft) (with respect to the mean height of the microphones), four flights at each height. The results for each height were averaged, and analysed as previously described (except that two of the ten microphones were not used). The attenuations as a function of helicopter height are plotted in Fig. 6.

4. Discussion of results

Considering first the results for the 28 days, although the weather was not necessarily an exact sample of all possible weather conditions, it was varied and reasonably typical of this locality. For example, the turbulence varied between „light“ and „severe“ the temperature (at ground level) between −4.5° C (24° F) and 20.5° C (71° F), and the relative humidity (at ground level) between 30 per cent and 85 per cent. The maximum wind speed within ±20° of the direction of the sound propagation was 16 km per hour (10 mph) at the surface and 32 km per hour (20 mph) at a height of 305 m (1 000 ft). The maximum wind speed in the opposite direction was 32 km per hour (20 mph) at the surface and 64 km per hour (40 mph) at a height of 305 m (1000 ft). Nevertheless, in spite of this wide variation of weather conditions, there were only slight changes in the attenuation, and even these it was not possible to correlate with the weather. It appears therefore that up to about 1 000 c/s and at these helicopter heights no significant attenuation is caused by wind and temperature gradients or by the presence of the ground.

In the highest octave measured (1 200 to 2 400 c/s) there was some appreciable attenuation. This was probably due to the molecular absorption of the air, although it could not be correlated with temperature and humidity. However, an octave band is rather too wide for such a correlation.

It might be added that even if the assumption made in the directivity and attenuation calculations were not valid, it would still be true that the weather did not vary the attenuation. This is shown by the fact that the absolute sound pressure levels at the microphones did not vary appreciably from day to day. For example, the average value for all the 28 days in the 300 to 600 c/s octave at microphone 8 (610 m (2 000 ft) distance from the source) was 61 dB, with a standard deviation of ±2 dB.

All measurements were made in day-light hours, but the only factor likely to be consistently different during darkness is the temperature gradient. But in any case temperature inversions which might occur at night should in theory tend to reduce the attenuation.

It is seen from Fig. 6 that the attenuation in all octaves increased rapidly when the helicopter height was less than about 100 m (300 ft). These particular measurements were made on one day when the weather was calm. It may be that at these lower heights the weather will affect the propagation.

Acknowledgments

This work forms part of the research programme of the Building Research Board of the Department of Scientific and Industrial Research, and this paper is published by permission of the Director of Building Research.

Active assistance was given by the Ministry of Supply and by the Ministry of Transport and Civil Aviation. Thanks are also due to Thames House Estates Ltd., and I.C.I. Ltd., who generously loaned the recording room, and to the Meteorological Office who supplied the meteorological data.

(Received 16th July, 1957.)

References

[1] Parkin, P. H. and Scholes, W. E., J. acoust. Soc. Amer. **26** [1954], 1021.

ÉTALONNAGES PAR RÉCIPROCITÉ EN CHAMP LIBRE DE TRANSDUCTEURS SOUS-MARINS*

par H. Mermoz

Ingénieur Télécommunications, Détaché pour Recherches au Ministère de la Marine,
Le Brusc (Var.)

Sommaire

La méthode classique de réciprocité en champ libre permet l'étalonnage de transducteurs linéaires sous marins pour les fréquences supérieures à 5 kHz. Dans le présent article, l'auteur rappelle brièvement le principe de cette méthode et insiste au passage sur les causes d'erreurs. Une brève description est donnée de l'installation et des mesures faites au laboratoire de la Marine Nationale au Brusc.

Zusammenfassung

Lineare Wandler für Wasserschall können bei Frequenzen oberhalb 5 kHz nach der klassischen Reziprozitätsmethode im Freifeld geeicht werden. Der Verfasser gibt zunächst eine kurze Darstellung dieser Eichmethode und behandelt dann eingehend die einzelnen Fehlerquellen. Abschließend wird die Meßanordnung im Laboratorium der Marine Nationale in Brusc beschrieben und von den Messungen berichtet.

Summary

The reciprocity method used in a free field can be used to calibrate linear underwater transducers at frequencies above 5 kc/s. The author surveys briefly the principle of this method, pointing out sources of error. He then describes the installation and measurements carried out at the laboratory Brusc of the Marine Nationale.

1. Objet

Pour contrôler ses installations d'acoustique sous-marine et pour mettre en œuvre sur des bases solides un programme étendu de mesures de bruit, la Marine Nationale Française a eu besoin de transducteurs électroacoustiques sous-marins étalonnés avec précision. Le Laboratoire de Détection sous-Marine du Brusc a donc créé et développé une installation d'étalonnage répondant le mieux possible à ces besoins.

2. Généralités

La méthode d'étalonnage utilisée pour les fréquences supérieures à 5 kHz est celle de réciprocité en champ libre. Bien qu'elle soit absolument classique, j'en rappellerai brièvement le principe pour insister, au passage, sur les causes d'erreur.

La méthode permet, on le sait, d'étalonner simultanément deux transducteurs que nous appellerons T_1 et T_2.

Comme cas particulier, il est possible d'étalonner simultanément un transducteur et un récepteur non reversible.

L'application de la méthode suppose:

- que les deux transducteurs sont linéaires,
- que les conditions de champ libre sont remplies.

3. Linéarité

La condition de linéarité postule simplement l'absence de phénomènes de saturation dans le transducteur qui émet; ceci suppose qu'on ne lui applique que des puissances faibles. Le critère de la linéarité est la proportionnalité entre la pression acoustique en un point quelconque du champ produit par l'émetteur, et le courant qui l'alimente.

Dans un transducteur qui reçoit, la puissance transférée est extrêmement faible. La tension reçue est toujours proportionnelle à la pression acoustique. Contrôler le domaine de linéarité d'un émetteur consiste donc simplement à rechercher dans quelle limite la tension aux bornes d'un récepteur placé de façon quelconque dans le champ, reste proportionnelle au courant dans l'émetteur.

Il est entendu que les étalonnages dont nous parlons ne sont valables que dans le domaine de linéarité commun à T_1 et T_2.

4. Champ libre

Les conditions de champ libre justifient une petite discussion.

4.1.0. Définissons la sensibilité d'un récepteur électro-acoustique comme un quotient dont le numérateur est l'amplitude de la tension reçue à circuit ouvert, et le dénominateur l'amplitude de la pression acoustique *à l'endroit où* est placé le récepteur.

---

* Communication présentée à la réunion du G.A.L.F. tenue à Milan du 9 au 12 octobre 1956.

Une telle définition, et en particulier l'expression «à l'endroit où» n'est claire et suffisante que pour une sonde, c'est-à-dire pour un récepteur très petit devant la longueur d'onde et même théoriquement ponctuel; il y a deux raisons à cela:

- une sonde étant petite devant la longueur d'onde, l'amplitude de la pression acoustique est pratiquement constante dans toute région du champ de dimensions analogues; ceci est vrai quelle que soit la forme du champ sonore et des systèmes d'ondes stationnaires qui peuvent s'y développer.
- l'introduction de la sonde dans le champ ne provoquant aucune diffraction, la pression effectivement appliquée à la surface sensible de la sonde est la même partout, en phase et module, et elle est égale à sa valeur avant introduction de la sonde.

Il en résulte que le mode de vibration de la surface sensible n'est influencé ni par la forme du champ sonore, ni par l'orientation de la sonde; d'autre part, il n'est pas nécessaire, dans la définition précédente, de préciser si le dénominateur de la sensibilité est la pression avant ou après l'introduction de la sonde.

4.1.1. Cette simplicité disparait dans le cas d'un récepteur de dimensions non négligeables, voire même grand devant la longueur d'onde. Il faut préciser que le dénominateur de la définition est la pression en un point P du champ, *avant* l'introduction du récepteur, puisque c'est bien cette pression préexistante qui nous intéresse quand nous utilisons la sensibilité. D'autre part, il faut préciser quel est le point lié au récepteur — ou point de référence — que nous ferons coïncider avec le point P en plaçant le récepteur dans le champ. Ce choix du point de référence influe comme l'orientation, sur la diffraction du champ préexistant, donc sur la valeur des pressions sur la surface sensible, donc sur la valeur de la tension aux bornes à circuit ouvert.

4.1.2. Une sensibilité ne peut donc être définie que dans un champ préexistant donné, pour un point de référence donné et une orientation donnée. C'est donc une notion complexe et peu utilisable dans sa généralité. Lorsqu'on parle de sensibilité sans préciser, on entend la sensibilité en ondes planes ce qui définit le champ préexistant. Le champ d'ondes planes à l'avantage en outre d'éliminer le choix du point de référence; dans un champ d'ondes planes idéal, l'amplitude de la pression est la même en tout point et le dénominateur de la sensibilité se trouve alors très bien défini quelle que soit la façon dont le récepteur est mis en place. La diffraction autour du récepteur est invariante par translation. Elle ne dépend que de l'orientation du récepteur dans le champ c'est à dire de la *directivité en réception.* Cette expression implique automatiquement qu'il s'agit d'ondes planes.

4.1.3. En pratique un champ d'ondes planes est une petite portion de champ sphérique. Envisageons, par conséquent, de placer notre récepteur dans un champ sphérique où l'amplitude de la pression est inversement proportionnelle au rayon du champ. A la région destinée à être occupée par le récepteur correspondent deux valeurs extrêmes de rayon. L'écart relatif entre ces deux valeurs est précisément l'erreur relative maxima que l'on peut commettre sur le dénominateur de la sensibilité, en disant qu'il est égal à la pression «à l'endroit où» l'on place le récepteur. Si cette erreur est faible devant la précision désirée, c'est à dire si les dimensions radiales du récepteur sont suffisamment petites devant le rayon du champ, il n'y a pas lieu de choisir un point de référence sur le récepteur. Cette condition donne, en quelque sorte, le rayon minimum de champ sphérique qui dispense du choix d'un point de référence sans erreur appréciable sur le dénominateur de la sensibilité.

4.1.4. Par ailleurs si on considère la dimension du récepteur normale au rayon du champ, son quotient par le rayon est une quantité petite; la diffraction en ondes sphériques et la diffraction en ondes planes ne diffèrent que du second ordre par rapport à cette quantité. L'écart sur le numérateur de la sensibilité, c'est-à-dire sur la tension reçue à circuit ouvert, est donc aussi du second ordre. Cette condition fournit donc le rayon minimum de champ sphérique qui donne une erreur négligeable sur le numérateur de la sensibilité.

4.1.5. La plus sévère des deux conditions précédentes permet de définir le rayon minimum du champ d'ondes sphériques *presque planes* dans lequel la sensibilité peut être considérée à la précision voulue, comme égale à la sensibilité en ondes planes. Nous appellerons M cette sensibilité qui sera celle des étalonnages.

4.1.6. En résumé, soit un champ sphérique qu'on peut considérer comme produit par un point source Σ (Fig. 1); soit une région R susceptible de contenir le transducteur T et remplissant dans ce champ les conditions de la «presque planéïté» que nous venons de définir en fonction de la précision désirée.

Soit π l'amplitude de la pression dans la région R en l'absence de T, et soit e la tension reçue à circuit ouvert par T lorsqu'il est mis en place. La valeur de M est par définition e/π.

$$M = e/\pi \,. \tag{1}$$

La pression π qui est inversement proportionnelle

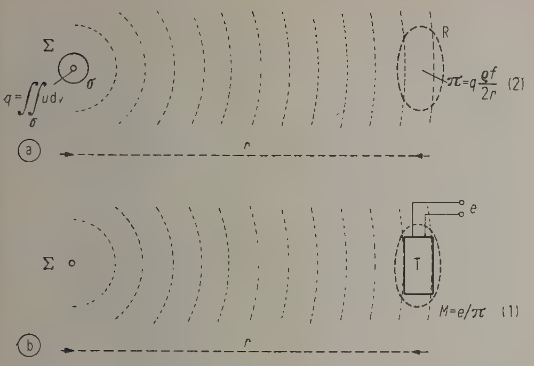


Fig. 1. Champ d'un point source.

au rayon peut s'exprimer en fonction du débit q du point source Σ, c'est-à-dire de l'expression $\iint u\,ds$ où u est la vitesse du fluide et où l'intégrale est prise sur une sphère infiniment petite entourant le point P. Cette relation résulte immédiatement des équations du champ sphérique et s'écrit:

$$\pi = q\,\frac{\varrho f}{2\,r}\,; \tag{2}$$

ϱ désigne la densité du fluide, f la fréquence.

4.2.0. Précisons à présent la définition de la réponse en émission.

C'est un quotient dont le numérateur est l'amplitude de la pression acoustique en un point A du champ produit par le transducteur; le dénominateur est l'amplitude du courant i qui l'alimente. Nous admettons que nous sommes dans le domaine de linéarité et que par conséquent cette quantité ne dépend pas de i.

4.2.1. Pour un émetteur très petit devant la longueur d'onde, omnidirectionnel par conséquent, et se rapprochant du concept de point source, la définition précédente est telle que dans un milieu illimité la réponse en un point donné fournit la réponse en tout autre point. Pour un émetteur directif au contraire, et même en milieu illimité, la réponse dépend du choix du point A, et plus précisément des trois coordonnées de A dans un trièdre lié à l'émetteur. Près de l'émetteur, dans ce qu'on peut appeler sa zone d'interférence, la réponse est une fonction en général très complexe de la position de A. Si le point A s'éloigne dans une direction définie par deux angles groupés sous la notation θ, l'amplitude de la pression tend à devenir inversement proportionnelle à la distance. On peut définir la distance minima pour laquelle la loi est vérifiée à tant pour cent près. On peut donc, autour de l'émetteur, et à l'extérieur d'une zone d'interférence d'autant plus étendue que la précision exigée est plus grande, définir une zone dite de champ libre dans laquelle le champ est en $1/r$ à tant pour cent près dans toutes les directions.

4.2.2. En principe, cette zone de champ libre dépend du choix de l'origine du trièdre lié à l'émetteur, c'est-à-dire du choix d'un point de référence. Si la condition précédente suffit à rendre négligeable les écarts relatifs de distance entre le point A et un point quelconque de l'émetteur, il n'y a pas lieu de préciser le choix du point de référence. S'il n'en est pas ainsi, il faut dilater la zone d'interférence jusqu'à ce que les écarts relatifs soient devenus négligeables.

De toute façon, la plus sévère des deux conditions définit le champ libre à tant pour cent près dans lequel la distance r d'un point A peut être comptée sans erreur appréciable à partir d'un point quelconque de l'émetteur.

4.2.3. Donc, en champ libre, la pression acoustique est le quotient, par la distance r d'une fonction de la direction c'est-à-dire de θ. Il est naturel de rapporter la valeur de la pression à sa valeur pour $r=1$ même si $r=1$ ne correspond pas physiquement à un point en champ libre. Nous appelons réponse en champ libre S, le quotient par le courant i de la valeur de la pression pour $r=1$. Celle-ci est donc égale par définition au produit $S\,i$ et la pression en champ libre à la distance r est égale par définition à:

$$p = S\,i/r\,. \tag{3}$$

La réponse S est évidemment fonction de θ et cette fonction est la directivité en émission du transducteur. Cette expression contient implicitement la notion de champ libre.

Une mesure de directivité en émission n'est correcte que si le champ est en $1/r$. Il en est de même pour les étalonnages destinés à mesurer S. L'écart par rapport à cette loi représente l'erreur de champ libre sur S et il est important de la connaitre pour apprécier la précision de la mesure de S.

On peut dire en somme que, dans la zone de champ libre, l'émetteur se comporte comme un point source situé dans la région qu'il occupe, en un point qu'on peut négliger de préciser et dont la puissance varierait avec la direction suivant la même loi que S.

5. Conséquences de la réciprocité

5.1. Entre la sensibilité M en ondes planes ou presque planes et la réponse S en champ libre, telles qu'elles ont été définies et dans les limites d'application où leur définition est correcte — il existe une relation simple qui résulte du principe de réciprocité. On sait déjà dans la pratique que la directivité en réception et en émission correctement mesurées sont identiques; ceci démontre que le rapport M/S ne dépend pas de la direction. On peut de plus montrer qu'il ne dépend pas du transducteur considéré.

Dans un quadripôle électrique la réciprocité se traduit de la façon suivante:

Injectons un courant d'un côté du quadripôle; nous recueillons une certaine tension à circuit ouvert de l'autre côté; le rapport de cette tension au courant injecté est une impédance de transfert. Nous pouvons de la même façon mesurer l'impédance de transfert dans l'autre sens. La réciprocité est l'égalité de ces deux impédances de transfert. Elle se traduit par une relation entre les 4 coefficients des équations de quadripôle.

5.2. Prenons un transducteur T immergé dans un milieu illimité et considérons un point P de ce milieu, en champ libre. Aux bornes de T peuvent apparaitre les variables électriques e tension, et i courant. Au point P peuvent apparaitre les variables acoustiques homologues, pression p, et débit q au cas où il existerait une source en P. Entre ces 4 variables, et dans les limites de linéarité du transducteur, on peut écrire des relations linéaires et homogènes analogues à celles du quadripôle. Les bornes de T et le point P forment un quadripôle électro-acoustique auquel nous appliquons le principe de réciprocité (Fig. 2).

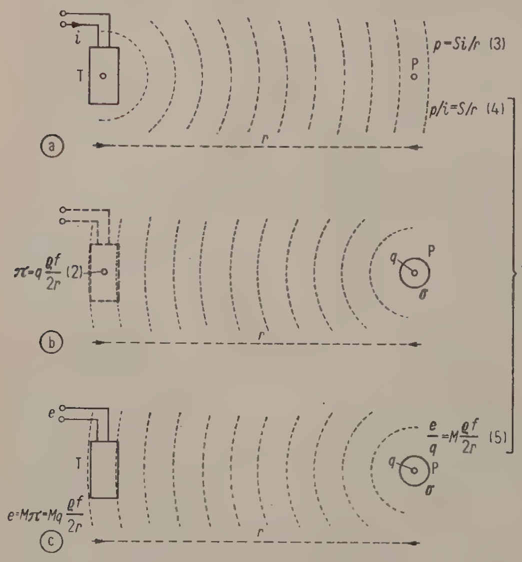


Fig. 2. Relations de réciprocité.

Injectons un courant i dans le transducteur. Nous créons en P une pression «à circuit acoustique ouvert» puisqu'il n'y a pas de débit. Le point P étant en champ libre, cette pression vaut $p=S\,i/r$ (3) par définition de S. L'homologue de l'impédance de transfert est

$$p/i=S/r\,. \tag{4}$$

Supposons à présent qu'un point source en P, de débit q, crée un champ acoustique et que le transducteur T reçoive à circuit ouvert une tension e. L'impédance de transfert dans ce sens est e/q.

Or e est égal au produit $M\pi$ où M est bien la sensibilité en ondes presques planes de T, et où π est la pression créée par le point source à l'emplacement de T et en l'absence de celui-ci.

On a vu que $\pi=q(\varrho f/2\,r)$ (2). Il résulte que l'impédance de transfert

$$e/q=M(\varrho f/2\,r)\,. \tag{5}$$

En égalant les deux impédances de transfert on trouve que:

$$M/S=2/\varrho f \tag{6}$$

c'est-à-dire que le rapport M/S ne dépend ni du transducteur, ni de la direction, mais seulement de la densité du milieu et de la fréquence. On pose en général ce rapport égal à J

$$2/\varrho f=J\,. \tag{7}$$

Si l'on exprime M en volt par barye et S en barye par amp. à 1 mètre, le coefficient J vaut, dans l'eau où $\varrho=1$:

$$J=2\times10^{-5}/f \quad (f \text{ en Hz})\,. \tag{8}$$

5.3. Il est évidemment important de se demander dans quelle mesure on a le droit de considérer une transformation électro-acoustique comme réciproque.

En vertu du principe de Helmolz, le problème ne se pose en réalité que pour les transformations électromécaniques. Cette question sort de notre sujet. Il ne semble pas que les conditions suffisantes minimum de réciprocité soient encore clairement établies. Par ailleurs des auteurs comme MacMillan ont pu montrer que des systèmes mixtes couplant mécaniquement deux transducteurs de type différent peuvent mettre le principe en échec[1]. Mais sa validité n'est pas contestée pour des transducteurs simples par exemple purement magnétostrictifs ou purement piézoélectriques dans la mesure où précisément ils n'utilisent qu'un procédé de transfert de l'énergie.

Nous nous en tiendrons à ces cas simples qui seuls nous intéressent pratiquement.

Il est facile d'ailleurs de vérifier expérimentalement deux conséquences nécessaires de la réciprocité. La première, bien connue, est l'identité des directivités en émission et en réception. La seconde est la suivante; si l'on place dans l'eau deux transducteurs réciproques T_1 et T_2, le quadripôle électrique formé par leurs quatre bornes est également réciproque. Ceci résulte de ce que chaque transducteur associé au même point P du milieu constitue, comme on l'a vu, un quadripôle électro-acoustique réciproque et que le quadripôle électrique T_1 T_2 peut être considéré comme le résultat de leur mise en cascade. Or deux quadripôles réciproques mis en cascade donnent toujours un quadripôle réciproque.

---

[1] Voir bibliographie

L'inverse n'est malheureusement pas exact, car il pourrait se faire que le défaut de réciprocité de deux quadripôles se compensent exactement dans la mise en cascade. Ainsi, bien que la réciprocité du quadripôle électrique T_1 T_2 se vérifie très bien expérimentalement, à la précision des mesures, elle ne constitue pas une condition suffisante de réciprocité. On peut se demander cependant si la réciprocité électrique de tous les couples $T_1 T_2$, $T_2 T_3$, $T_1 T_3$ etc. de plusieurs transducteurs de types différents ne constitue pas une preuve suffisante de réciprocité acoustique pour chacun d'eux.

6. Champ libre entre deux transducteurs

Sur le transducteur T_1, choisissons un point O_1 et une $\frac{1}{2}$ droite $O_1 \delta_1$ qui représente la direction dans laquelle on veut l'étalonner; soient M_1 et S_1 sa sensibilité et sa réponse dans cette direction. Sur le transducteur T_2 nous aurons de même le point O_2 et la $\frac{1}{2}$ droite $O_2 \delta_2$ à laquelle correspondent M_2 et S_2.

Plaçons T_1 et T_2 dans l'eau de façon que les deux directions s'opposent sur la même droite (Fig. 3). Les conditions de champ libre seront remplies entre T_1 et T_2 *pour le couple de directions* $O_1 \delta_1$, $O_2 \delta_2$ si chacun d'eux se comporte par rapport à l'autre comme un point source qu'on peut confondre sans erreur appréciable avec son point de référence.

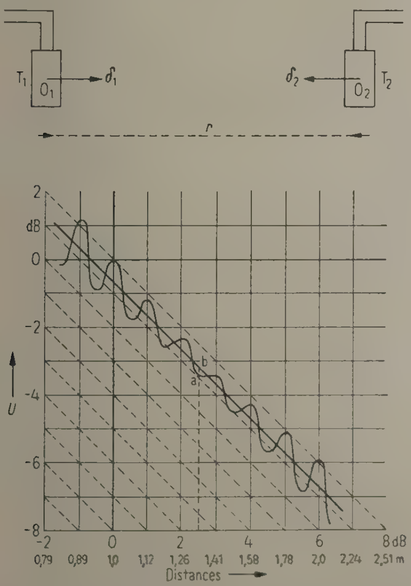


Fig. 3. Contrôle de la condition de champ libre.

Le critérium pratique est que T_1 par exemple émettant à courant constant, la tension reçue par T_2 soit inversement proportionnelle à la distance $O_1 O_2$. La réciprocité du quadripôle électrique $T_1 T_2$ donne alors la même loi, pour une tension reçue sur T_1 avec T_2 comme émetteur.

La vérification de la condition de champ libre qui est très importante est exécutée avant tout étalonnage sur des graphiques logarithmiques comme ceux de la Fig. 3. On porte en abscisse la distance $O_1 O_2$ en dB par rapport à 1 mètre. En ordonnée on porte la tension reçue aux bornes de T_2, ou une quantité proportionnelle si on utilise un amplificateur, exprimée en dB par rapport à une valeur quelconque.

Sur un tel graphique le champ libre idéal se traduit par une droite de pente négative inclinée à 45°. La courbe réelle, dans le cas moyen, présente l'aspect de la Fig. 3; elle oscille autour d'une droite idéale; les oscillations sont en général assez fortes aux faibles distances à cause des ondes stationnaires qui s'établissent entre les deux bases, et aux fortes distances parce qu'alors l'onde directe est perturbée par des réflexions parasites sur la surface, sur le fond, ou sur des obstacles qu'on n'a pas pu éliminer. Il existe en général une région moyenne où le champ est à peu près régulier, et qui est la plus favorable à la mesure.

On n'a pas toujours intérêt à éloigner le plus possible les deux transducteurs l'un de l'autre. Une telle courbe dépend en fait des directivités combinées des deux transducteurs, donc de la fréquence, des dimensions du bassin de mesure et du pouvoir absorbant de ses paroies. En particulier, l'emplacement de mesure limite très nettement la fréquence inférieure à laquelle on peut faire des mesures entre qui est représentée, en decibels par l'écart entre la courbe deviennent si fortes qu'elle est pratiquement inutilisable.

Quand elle l'est, en tout cas, elle tient compte de toutes les causes d'erreur possible sur les conditions de champ libre et elle permet de mesurer cette erreur qui est représentée, en decibels par l'écart entre la courbe et la droite moyenne idéale.

Ainsi, si l'on adopte une distance r (Fig. 3) où l'écart vaut $a\,b$ — il est commode pour la stabilité des lectures de se placer au sommet d'une oscillation par exemple — on corrigera de la valeur $a\,b$, la lecture de la tension reçue.

7. Impédance de transfert

Entre les quatre quantités M_1, S_1; M_2, S_2 qu'il s'agit de mesurer, la réciprocité nous donne deux relations tirées de la formule (6)

$$M_1/S_1 = M_2/S_2 = J\,. \qquad (6\,\mathrm{a})$$

La mesure de l'impédance de transfert du quadripole électrique $T_1\,T_2$ nous en donne une troisième, pourvu que les conditions de champ libre soient correctement réalisées. Soit alors i_1 le courant alimentant T_1 et e_2 la tension reçue à circuit ouvert sur T_2. Cette tension e_2 a été au besoin corrigée comme on l'a vu précédemment de façon à correspondre au champ libre. Dans ces conditions la pression créée par T_1 à l'emplacement de T_2 en l'absence de celui-ci est, comme on l'a vu:

$$\pi = S_1\,i_1/r$$

et la tension e_2 est égale à $M_2\,\pi$ d'où (Fig. 4)

$$e_2 = M_2\,S_1\,i_1/r\,. \qquad (9)$$

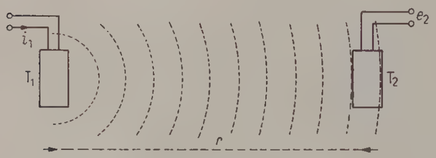


Fig. 4. Mesure de l'impédance de transfert.

L'impédance de transfert du quadripôle électrique est

$$e_2/i_1 = M_2\,S_1/r\,. \qquad (10)$$

e_2 et i_1 se mesurent séparément. Comme on connait r on peut calculer la quantité $r\,e_2/i_1$ que nous appelons Z et qui est l'impédance de transfert ramenée à la distance unité, dans la pratique, à 1 mètre. On a donc:

$$Z = M_2\,S_1\,. \qquad (11)$$

La réciprocité du quadripôle électrique entraine évidemment

$$Z = M_2\,S_1 = M_1\,S_2 \qquad (11\,\mathrm{a})$$

mais la dernière égalité est déjà contenue dans la formule (6a). Comme on l'a dit, il est facile de vérifier l'égalité des impédances de transfert dans les deux sens.

En définitive, le groupe de relations (6a) et (11a) où J et Z sont des quantités connues, constituent trois relations indépendantes. Une quatrième est nécessaire pour calculer $M_1\;S_1\;M_2\;S_2$.

8. Rapport des sensibilités

La relation supplémentaire nécessaire peut s'obtenir en mesurant soit le rapport S_1/S_2 soit le rapport M_1/M_2. Pratiquement, c'est M_1/M_2 que l'on mesure. Il faut disposer pour cela d'un émetteur E rapporté lui aussi à un point de référence O et une demi-droite $\mathrm{O}\,\delta$. Il est alimenté par un courant qui reste constant pendant toutes les mesures et donne ainsi un champ acoustique constant. Plaçons dans ce champ le transducteur T_1 de façon que les deux directions $\mathrm{O}_1\,\delta_1$ et $\mathrm{O}\,\delta$ s'opposent sur la même droite. Vérifions les conditions de champ libre entre T_1 et E. Avec ou sans correction nous mesurons une tension $e_1{}'$ à circuit ouvert aux bornes de T_1, pour une distance OO_1, égale à r_1. Faisons ensuite la mesure homologue avec T_2. Nous avons la tension $e_2{}'$ pour la distance r_2. Il est clair que le rapport des sensibilités de T_1 et T_2 vaut alors

$$M_1/M_2 = e_1{}'\,r_1/e_2{}'\,r_2\,. \qquad (12)$$

On peut donc le calculer et appelons R sa valeur:

$$R = M_1/M_2\,.$$

9. Formules de résolution

Nous disposons à présent d'assez de relations pour l'étalonnage simultané de T_1 et T_2. Les formules sont:

$$M_1/S_1 = M_2/S_2 = J\,, \qquad J = 2/\varrho f\,,$$
$$M_1\;S_1 = M_2\;S_2 = Z\,, \qquad M_1/M_2 = R\,,$$
$$M_1 = \sqrt{Z\,J\,R}\,, \qquad S_1 = \sqrt{Z\,R/J}\,,$$
$$M_2 = \sqrt{Z\,J/R}\,, \qquad S_2 = \sqrt{Z/J\,R}\,.$$

Remarquons que l'erreur relative sur les M et sur les S est égale à la *demi*-somme des erreurs relatives sur Z et sur R.

La mesure de Z comporte:

1 vérification de champ libre,
2 mesures électriques — tension et courant.

La mesure de R comporte:

2 vérifications de champ libre,
2 mesures électriques: deux tensions.

Un étalonnage par comparaison avec un étalon maître comporterait les mêmes opérations que la mesure de Z et l'erreur relative serait par conséquent égale, dans des conditions identiques, à l'erreur relative sur Z.

Si on fait le bilan des deux méthodes on s'aperçoit que la mesure par comparaison ne l'emporte en précision, que si l'erreur relative de l'étalon maître est inférieure à la moitié de l'erreur qu'on peut commettre sur une vérification de champ. Or, dans la gamme de fréquence où l'emplacement de mesure nous a permis d'opérer jusqu'à présent, il est assez facile — les graphiques de vérification de champ le montrent — d'obtenir une précision de ± 0,3 dB (± 3,5%). Il faudrait donc un étalon maître stable et précis à mieux que 3%. Nous ne pensons pas qu'un tel étalon, s'il existe, puisse être utilisé dans les conditions proches de la pratique où nous opérons. C'est pourquoi l'étalonnage direct des transducteurs d'usage courant nous parait préférable. Comme on en étalonne deux à la fois, le bilan des temps de travail n'est pas lui non plus défavorable[2].

Enfin, la méthode possède un grand avantage psychologique, parce qu'elle dispense précisément d'avoir confiance dans un étalon maître, dont on peut toujours redouter les variations ou les détériorations.

10. Précision calculée

10.1. Un étalonnage comporte trois vérifications de champ et quatre mesures électriques. La précision des verifications de champ dépend des dimensions du bassin de mesure et en particulier de sa profondeur. Actuellement, pour les fréquences supérieures à 8 kHz, nous comptons sur une précision de ± 0,3 dB en général. Nous pouvons encore travailler entre 6 et 8 kHz à ± 0,5 dB. En dessous de 6 kHz les mesures sont très approchées.

10.2. En ce qui concerne les mesures électriques, nous n'avons pas encore cherché à pousser la précision au maximum. Avec un ampèremètre à thermocouple et des voltmètres fréquemment contrôlés, nous comptons également sur une précision de ± 0,3 dB (3,5%).

La demi-somme des sept erreurs donne donc:

± 1,05 dB au-dessus de 8 kHz,
± 1,35 dB entre 6 et 8 kHz.

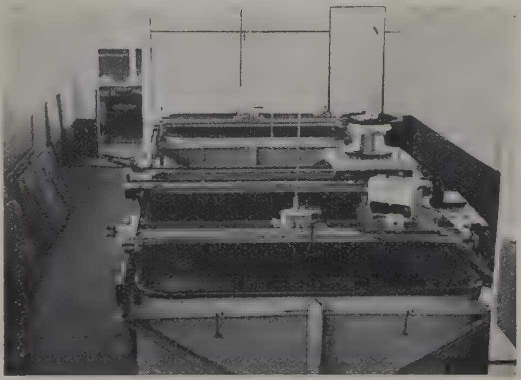
Comme il y a bien peu de chance que sept erreurs s'ajoutent intégralement, nous ne pensons pas être optimistes en comptant sur une précision de ± 1 dB au dessus de 8 kHz et ± 1,2 dB entre 6 et 8 kHz. Nous verrons qu'une mesure plusieurs fois répétée donne une convergence meilleure.

La précision de ± 1 dB qui était notre but initial est à peu près suffisante pour nos besoins. Pour l'obtenir à coup sûr en dessous de 8 kHz un bassin plus vaste, plus profond, suffirait. Mais l'intérêt de ces fréquences n'a pas paru justifier jusqu'à présent la dépense à engager. Pour des fréquences beaucoup plus basses, par exemple inférieures à 3 kHz, la méthode en champ libre cesse d'être praticable et il faut faire appel à d'autres méthodes.

Les vérifications de champ qui sont à la base de la méthode sont, dans la pratique courante, très simplifiées par l'entrainement des opérateurs. Comme on a très souvent le même type de transducteur à étalonner, on sait assez vite que pour un couple de type donné, à une fréquence donnée, la précision de champ est suffisante et il n'est pas nécessaire de refaire chaque fois la mesure.

11. Installation

La Marine Nationale a installé à proximité de son Laboratoire du Brusc un chaland-laboratoire où se font les mesures d'étalonnage. Ce chaland est installé sur une fosse draguée dans un haut fond (Fig. 5 à 7), à 200 m environ du rivage. La fosse a une vingtaine de mètres de dimension horizontale et entre 4 et 5 mètres de profondeur. Le fond du chaland est percé de deux cuves. Celles-ci sont bordées de rails qui servent à des chariots. Ceux-ci sont à leur tour



Figs. 5, 6 et 7. Vues du chaland-laboratoire du Brusc.

---

[2] Une mesure supplémentaire de tension reçue, permet, au besoin, d'étalonner du même coup le transducteur qui sert de source auxiliaire E, dans la mesure de R. Le bilan devient alors nettement favorable.

parcourus par des chariots plus petits qui supportent les axes de suspension des transducteurs.

On peut ainsi déplacer ceux-ci dans deux dimensions: les faire tourner autour d'un axe vertical et régler leur immersion. On travaille en général à des immersions comprises entre 2 m et 2,50 m.

Le banc de mesure comporte (Fig. 8):

a) *du côté émission*

- un générateur de tension sinusoïdale,
- un amplificateur de puissance 10 watts dont la sortie est adaptable aux impédances des transducteurs mesurés,
- un ampèremètre à thermocouple (3%) est mis en circuit pour faire la mesure du courant puis aussitôt remplacé par une résistance égale,
- un voltmètre V_1 mesure la tension aux bornes de l'émetteur,
- éventuellement, on peut contrôler le taux d'harmoniques de la tension sur l'émetteur;

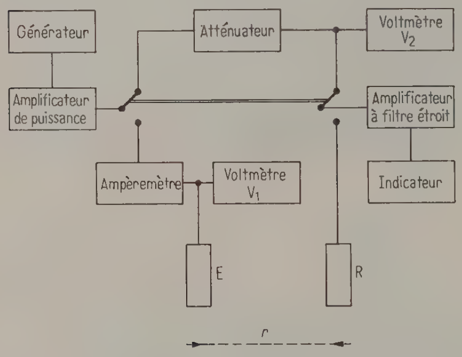


Fig. 8. Schéma de principe du banc de mesures d'étalonnage.

b) *du côté réception*

- un amplificateur à haute impédance d'entrée (supérieure à 100 kΩ entre 5 et 50 kHz) qui permet de recevoir à *circuit ouvert* entre 5 et 50 kHz sur tous les hydrophones utilisés jusqu'ici.
- Cet amplificateur est accordé sur la fréquence de mesure entre 5 et 50 kHz par un changement de fréquence et un filtre de 500 Hz de largeur de bande. Ce filtre étroit élimine les bruits parasites et permet de mesurer des niveaux sonores de −50 dB par rapport à une barye,
- un indicateur en bout de chaine permet de repérer les tensions à la sortie de l'amplificateur. Cet indicateur a son cadran amorti par de fortes constantes de temps de façon à pouvoir faire des lectures correctes même par houle moyenne,
- une commutation permet de couper la chaine acoustique et d'injecter à l'entrée de l'amplification, une tension réglable par un atténuateur et mesurable avec le voltmètre V_2.

La mesure de la tension reçue à circuit ouvert sur un hydrophone se fait donc en repérant, après accord de l'amplificateur, la déviation de l'indicateur. Ensuite, on coupe la chaine acoustique et on injecte sur l'ampli une tension de référence mesurée avec précision par V_2. Ce procédé permet d'éliminer les erreurs dues à l'amplificateur.

L'impédance de transfert est donc, en définitive, le rapport d'une tension de référence et du courant dans l'émetteur.

Le rapport des sensibilités est le rapport de deux tensions de référence. Toutefois, pour des valeurs de ce rapport ne dépassant pas 5 ou 6 dB, on utilise directement le cadran de l'indicateur gradué en decibels et qui donne une précision suffisante.

12. Réponse par volt

Nous avons appelé S la réponse en émission, c'est-à-dire la pression sonore à 1 mètre par unité de courant ou encore les baryes par ampère à 1 m. On peut également définir la réponse par volt à 1 m qui est égal au quotient de la précédente par le module de l'impédance. Cette réponse est plus facile à utiliser pour qui veut produire avec le transducteur un niveau connu, car on dispose plus fréquemment d'un voltmètre que d'un ampèremètre. C'est pourquoi, on a placé dans le banc de mesure le voltmètre V_1 qui donne la tension aux bornes de l'émetteur. On peut ainsi calculer le module de l'impédance et par conséquent la réponse par volt.

Pour le transducteur placé en réception, une mesure d'impédance supplémentaire est nécessaire. Les mesures des réponses par volt exigent donc une ou deux mesures électriques de plus et par conséquent comportent des erreurs supplémentaires.

13. Convergence des résultats

La courbe de la Fig. 9 donne la valeur de la sensibilité d'un transducteur piézoélectrique entre

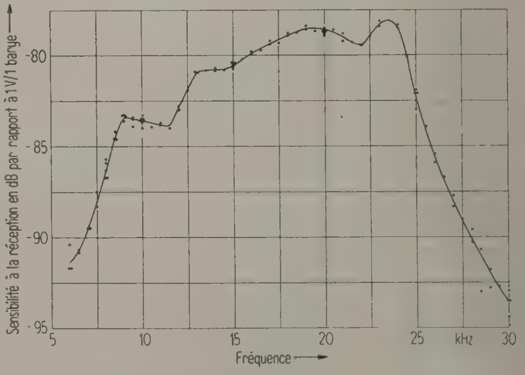


Fig. 9. Étalonnage par réciprocité d'une base piezoélectrique (sensibilité).

6 et 30 kHz. Chaque point de mesure correspond à une mesure par réciprocité faite avec un transducteur auxiliaire différent, une source E différente et des conditions de mesure variables.

Si l'on excepte les deux fréquences extrèmes où la pente de la courbe justifie une certaine dispersion, on voit qu'on a obtenu couramment sur la même fréquence, plus de 5 points de mesure dont la dispersion totale ne dépasse pas 1 dB. Ceci autorise à penser que la précision est bien proche de ±0,5 dB.

La Fig. 10 concerne la réponse par volt du même transducteur. La dispersion est un peu plus forte mais laisse espérer une précision de ±0,7 dB.

Sans nous engager sur ces chiffres qui ont besoin d'une confirmation statistique plus complète, il semble que la précision «officielle» de ±1 dB soit asez facilement tenue.

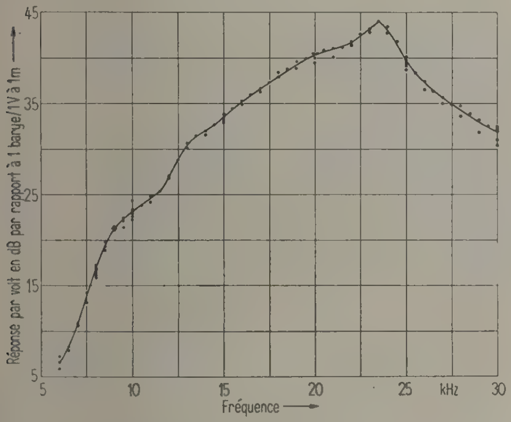


Fig. 10. Étalonnage par réciprocité d'une base piezoélectrique (réponse par volt).

14. Utilisation éventuelle des impulsions, inconvénients

On peut réaliser la condition du champ libre même dans une cuve de petites dimensions, à condition d'opérer en impulsion et de ne tenir compte sur le récepteur que de l'onde directe séparée des échos parasites par le balayage d'un oscilloscope. Une telle méthode permet de se passer d'un emplacement de mesure de grandes dimensions. Mais l'objection majeure à un tel procédé est que les mesures électriques deviennent des mesures à l'oscilloscope et perdent ainsi beaucoup de précision par rapport aux mesures en régime permanent.

De plus, l'obligation d'utiliser des impulsions courtes (de l'ordre de la milli-seconde) rend impossible ces mesures sur la fréquence de résonance d'un transducteur dont le coefficient de surtension mécanique serait élevé. En effet, dans ces conditions ni le courant dans l'émetteur, ni la tension sur le récepteur n'ont le temps de s'établir et la définition de leur valeur devient difficile.

Enfin, il n'est pas exclu à priori que, sur des impulsions très courtes, les réponses des transducteurs ne soient pas exactement les mêmes qu'en régime permanent en raison de phénomènes transitoires éventuels. Les mêmes objections peuvent être adressées aux méthodes de self-réciprocité. C'est pourquoi il a paru préférable de réserver les méthodes d'impulsions pour des étalonnages moins précis faits par comparaison, pour rechercher le maximum de précision en opérant en régime permanent et, dans la mesure du possible, loin de tout obstacle.

15. Possibilités d'amélioration

Rien n'exclut, avec la même méthode, une précision plus grande. On pourrait gagner sur la condition de régularité de champ, dans un volume d'eau plus vaste et plus calme que la fosse marine utilisée. Ceci est vrai surtout aux basses fréquences, mais suppose l'aménagement d'un site — petit lac ou plan d'eau calme et assez profond éloigné des sources de bruit — donc d'assez gros moyens matériels. Il faudrait également rapprocher les procédés de mesure de ceux des Laboratoires de Métrologie. On atteindrait certainement assez aisément la précision de ±0,5 dB à chaque mesure.

Aux fréquences élevées — de l'ordre de 100 kHz — où, pour des directivités équivalentes, les émetteurs sont plus petits et plus maniables, où les ondes sonores sont plus facilement absorbées, les conditions de champ libre sont plus faciles à réaliser dans des cuves de dimensions restreintes. La méthode peut s'appliquer dans les conditions mêmes de la recherche de Laboratoire. Elle parait être ainsi mieux adaptée encore à ces fréquences qu'aux fréquences usuelles de l'acoustique sous-marine.

(Reçu le 11. Novembre 1956.)

Bibliographie

[1] Lord Rayleigh, Theory of sound, vol. 2, § 294. MacMillan, London 1896.

[2] Foldy, L. L. et Primakoff, H., General theory of passive linear electroacoustic transducers and the electroacoustic reciprocity theorem. J. acoust. Soc. Amer. **17** [1945], 109 et **19** [1947], 50.

[3] MacMillan, E. M., Violation of the reciprocity theorem in linear passive electromechanical systems. J. acoust. Soc. Amer. **18** [1946], 344.

[4] Thomson, P., Theoretical aspects of the reciprocity calibration of electromechanical transducers. J. acoust. Soc. Amer. **21** [1949], 538.

SIGNAL/NOISE PERFORMANCE OF SUPER-DIRECTIVE ARRAYS

by D. G. Tucker

Electrical Engineering Department, University of Birmingham

Summary

A super-directive array is defined as one whose effective aperture exceeds its physical aperture, and it is shown that while such an array has a Directivity Index somewhat better than that of an ordinary array, nevertheless its Noise Factor is much worse. Consequently, in many receiving systems, the use of super-directivity is not be recommended. The conception of super-directivity is extended to bearing-determining arrays which give a null response on the axis, and it is shown that the same disadvantage of a bad Noise Factor applies to them also.

Sommaire

On dit qu'une baie de réception électro-acoustique est «superdirective» lorsque son ouverture efficace est supérieure à son ouverture géométrique. Un tel dispositif a un indice de directivité quelque peu supérieur à celui d'une baie normale, mais on montre que son facteur de bruit est beaucoup moins bon: de sorte que de recourir à la superdirectivité n'est pas à recommander, dans beaucoup de problèmes de réception.

On étend la notion de superdirectivité aux baies de goniométrie à réponse nulle sur l'axe: on montre qu'elles aussi présentent l'inconvénient d'un mauvais facteur de bruit.

Zusammenfassung

Als Anordnung mit Über-Richtwirkung wird eine solche bezeichnet, deren effektive Öffnung größer ist als die physikalische. Es wird gezeigt, daß eine solche Anordnung einen etwas besseren Richtfaktor hat als eine gewöhnliche, jedoch ist die Rauschzahl ungünstiger. Folglich ist für viele Empfangssysteme die Anwendung der Über-Richtwirkung nicht zu empfehlen. Das Prinzip der Über-Richtwirkung wird ausgedehnt auf Peilanordnungen mit Nullanzeige in Achsenrichtung. Auch für diese Systeme bestehen die Nachteile der ungünstigen Rauschzahl.

1. Introduction

This paper is a sequel to a previous one [3] which developed a new approach to the calculation of signal/noise performance of arrays. It was shown that, while the conventional directivity factor (or directivity index) measures the signal/noise performance of a beam-forming array as far as noise received from the medium is concerned, it does not provide a true measure of the performance in respect of thermal agitation noise in the transducers or receiving amplifiers, except when the array is large so that all the effective angular range of response is confined to a comparatively small angle. For taking account of thermal agitation noise, and to allow for arrays which do not form a conventional beam but instead produce a null on the axis, and for arrays in which the outputs from two halves are multiplied together, the signal/noise performance factor (called Noise Factor) was proposed. This Noise Factor in the ratio by which the signal/noise performance of a receiving system is worse than that of the same array used with uniform and equiphase sensitivity along its length. In addition to a rather wider range of application, Noise Factor has the advantage over directivity factor of being much more easily calculated.

The present paper is concerned with arrays of the type frequently called "Super-Directive". While no formal definition of this term appears in standard glossaries, it can probably be defined by usage as describing an array whose effective aperture exceeds its physical aperture; in other words the super-directive array has a directivity index (or power gain in the terminology of electro-magnetic aerials) greater than that of the uniform and equi-phase array[1]. This result can be obtained only at the expense of a very substantial response in the range of imaginary angles, where $|\sin\theta| > 1$, θ being the angle of any direction relative to the normal to the face of the array.

It might be thought that the super-directive array, having such a favourable directivity factor, would have considerable merits as a transmitting array. This is in principle true enough, although in practice it may be difficult to realise with sufficient accuracy the required amplitude distribution over the array; and the power efficiency is low. For reception, however, the use of superdirectivity is, even in principle, of questionable value, since it will be shown in this paper that the Noise Factor is worsened at a much faster rate than the directivity factor is improved. It is in fact in relation to super-directive arrays that the use of the Noise Factor as a criterion of performance is most valuable. In the previous paper where the Noise Factor was discussed in relation to ordinary arrays, its merits were less emphatically established.

---

[1] This use of the term "Super-directive" appears universal in published work on the subject; see, for example, Pritchard [5], [6]. It should be noted, however, that Pritchard gives the impression that "super-directive arrays" and "arrays with reversed-phase excitation" are synonymous; but, in fact, reversed-phase excitation (or sensitivity, in the case of a receiving array) can be used advantageously for purposes other than to obtain super-directivity — see, e. g., Section 10 of reference [1].

For simplicity, discussion in this paper, as in the previous papers, is confined to strip or line arrays, i. e. to arrays of negligible width, although of finite length. This means that the directional patterns can be considered in two dimensions only. This simplification does not affect any of the principles involved. It is also assumed in the illustrative examples that the arrays are formed from a continuous transducer divided into equal sections. Only "broadside" arrays are specifically considered – i. e. only arrays whose acoustic axis is normal to the line of the array – but "endfire" arrays give the same kind of result.

Calculations of the distribution of sensitivity over the length of the array, and of the number of sections required, are not given here, as their basis has been given in an earlier paper [1].

2. The design of a super-directive array

As explained above, the super-directive array differs from the ordinary one in having a substantial response in the range of imaginary angles, i. e. where $|\sin\theta| > 1$. Directional responses are normally calculated in terms of a variable x, which is given by

$$\frac{l\pi}{\lambda}\sin\theta\,,$$

where l is the length of the array and λ is the wavelength. On the x-scale, therefore, the limit of real-angle response occurs where $x = \pm l\pi/\lambda$. It is clear then that the design of a super-directive array depends on knowledge of the length (or size in the general case) of the array and cannot be worked out in more general terms. Reference has already been made to the region of imaginary angles, where $|x| > l\pi/\lambda$; the significance of this range will be discussed in more detail later. For the time being it need merely be said that this range plays an important part in determining the signal/noise performance of the array.

The design problem of any array is of course to find the distribution of sensitivity and phase, over the length of the array, required to give the desired directional pattern. We are, in this paper, concerned only with receiving arrays, but the same directional response is obtained on transmitting if the distribution of excitation corresponds to the distribution of sensitivity discussed here. The directional pattern and the distribution of sensitivity are related by the Fourier transforms shown below:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi r x}\, T(r)\, dr\,,$$

$$T(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi r x}\, D(x)\, dx\,,$$

where $T(r)$ is the so-called tapering function, i. e. the distribution of sensitivity over the length of the array, and $D(x)$ is the directional pattern on the scale of x. Obviously $D(x)$ is different at different frequencies, since x is a function of λ and therefore these equations apply at any one particular frequency. It would in principle be possible to determine a suitable function, $T(r)$, from these equations to give the required pattern $D(x)$. The process would in practice be difficult. A much simpler technique was described in [1], where the pattern of any desired degree of complexity can be synthesised by the super-position at suitable amplitudes of a number of elementary patterns. These elementary patterns are based on the pattern $D(x) = (\sin x)/x$ which is obtained from the array when the sensitivity is uniform and the phase is constant over its length. By subjecting the successive sections of the array to successive phase-shifts (e. g. by connecting the sections to a delay line) the pattern can be deflected to one side or other of the axis, so that it takes the form

$$\frac{\sin(x \pm n\pi)}{x \pm n\pi}\,.$$

The process of synthesis is thus very simple and its details need not be repeated here. When symmetrical patterns are being produced, it is unnecessary to use

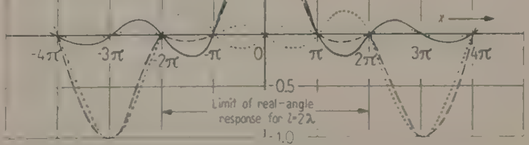


Fig. 1. Example of synthesis of super-directive response with reduced secondary lobes and slightly-narrowed main beam.

real delay lines, since the overall effect is easily shown to be realised by giving different sensitivities to different sections of the array.

The design of super-directive arrays by this process of synthesis is quite straightforward. It simply involves super-posing on any ordinary directive pattern some other patterns which have their peak responses in the range of imaginary angles[2]. Their secondary lobes are used to modify the ordinary response and in particular to cancel out its secondary lobes. The process will be made clear by some examples.

Figs. 1, 2 and 3 show three simple cases of the synthesis of a super-directive response. In Fig. 1, the full line curve shows a normal $(\sin x)/x$ pattern of unity peak height. It will be assumed that the length of the array is twice the wavelength, so that the limit of real angle response is given by $x = \pm 2\pi$. Within this range fall the first secondary lobes of the pattern with an amplitude of 0.22. These secondary lobes can be reduced to very small values, with an accompanying narrowing of the main lobe, by adding in opposite sense the two deflected patterns shown by dotted lines. Each of these has a peak height of -1.0 occurring at $x = \pm 3\pi$, i. e. in the range of imaginary angles. It is seen that the resultant pattern shown in dashed lines is, in the range of real angles, very considerably improved. Similarly in Fig. 2, two patterns with peak amplitude of -1.5 have been added to the ordinary pattern with still further improvement in directionality.

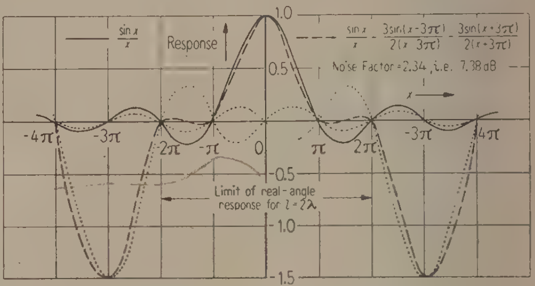


Fig. 2. As in Fig. 1, but with secondary lobes practically eliminated.

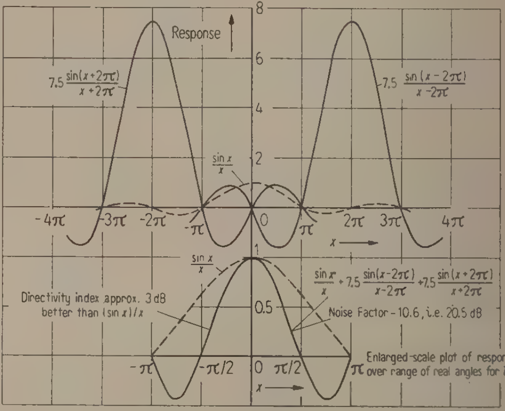


Fig. 3. Example of synthesis of super-directive response with main beam greatly narrowed.

Fig. 3 shows an example of a slightly different kind. Here it is assumed that the array has a length of λ, so that the limit of real angle response is given by $x = \pm\pi$. The aim has been to obtain a beam of one-third the width, in the θ-scale, of the ordinary beam corresponding to this length of array, or on the x-scale with a width of one-half that of the ordinary pattern. This has been accomplished by adding two deflected patterns with their peaks at $x = \pm 2\pi$, and amplitudes calculated to give a zero resultant at $x = \pm\pi/2$. This necessitated the amplitude of the peaks in the range of imaginary angles being 7.5 times that of the ordinary pattern[3]. The resultant pattern shown in the lower graph in Fig. 3 is seen to have secondary lobes, in the range of real angles, of peak amplitude 0.44, i. e. rather larger than those of the ordinary pattern, but the main beam is narrowed, as desired. The directivity index of the new pattern is approximately 3 dB better than that of the ordinary $(\sin x)/x$ pattern. Evidently the secondary lobes can be reduced by the addition of further deflected patterns. Even greater improvements can be obtained by the super-position of patterns whose zeros do not coincide. This matter is described by Woodward and Lawson [4], who show moreover the price that has to be paid for this improved directivity in terms of difficulty of construction. In extreme cases, extreme accuracy of distribution of sensitivity over the length of the array is required. In one of their examples a variation of amplitude of the thickness of the line in the graph is sufficient to remove the beam altogether.

---

[2] The definition of super-directivity in terms of large response in the region of imaginary angles seems to have many advantages in spite of the difficulty of providing a simple physical explanation of the significance of imaginary angles. For instance, it follows directly from this definition and from the delay-line method of synthesis that, since major peaks of response are to fall outside the range of physical angles, i. e. outside $\pm\pi/2$ radians from the normal to the array, then the spacing between sections of the array cannot exceed half-a-wavelength. This is because the electrical delay networks which couple the sections together cannot give phase differences between adjacent sections of more than π radians for steady-state signals in which one cycle is indistinguishable from another. It also follows from the definition and from the work of [3] that the thermal-agitation noise of the dissipation resistance of the array is proportional to the power gathered (notionally) by the whole directivity pattern including imaginary angles, whereas noise arising in the medium is received by the portion of the directivity pattern corresponding to real angles only. This accounts for the poor Noise Factor discussed in Section 3.

[3] It may be of interest to note that the variation of relative sensitivity along the length of the array is in this case given by $1 + 15\cos 2r\pi$, where the array extends in length from $r = -1$ to $r = +1$. The minimum number of sections required in the array is five, and the maximum spacing between centres of the sections is therefore $\lambda/5$.

It does not seem to have been pointed out previously that in addition to the practical price paid for super-directivity there is a fundamental price paid in the worsening of the Noise Factor[4]. This will be described in the next section.

3. Noise factor of super-directive arrays

Even though the use of delay lines to produce the deflected beams used in the process of synthesis referred to above is not necessary in practice, nevertheless the retention of these delay lines as a stage in the design process is very helpful in the calculation of Noise Factor. Clearly, when a number of patterns are superposed the noise powers appearing at the terminals of the delay lines are added. It was shown in [2] that for the values of phase-shift used in the delay lines for this process the outputs of noise from the various delay lines are all uncorrelated with one another provided the noise voltages in the various sections of the array are themselves uncorrelated[5]. Thus it is clear that the improvement of directivity factor by the superposition of patterns with peaks in the range of imaginary angles adds merely to the noise output, while contributing nothing to the peak signal output. The Noise Factor must therefore be considerably worsened. Moreover, while the improvements which have been achieved in the directivity factor are comparatively small, the worsening of the Noise Factor is comparatively high. For example, in Figs. 1, 2 and 3, the Noise Factors are worsened by approximately 5, 7 and 20 dB respectively. In Fig. 3, then, an improvement of 3 dB in directivity is paid for by a worsening of 20 dB in Noise Factor. For a transmitting array where noise factor is not relevant, and when ample power is available, no doubt super-directivity is worth attempting. On reception it will usually be undesirable.

The extent to which super-directivity may be an advantage or a disadvantage for receiving arrays depends on the source of background noise against which the signal is to be detected. If the noise arises in the medium – for example, in an under-water array such noise would comprise thermal-agitation noise in the water and also what is generally called "sea-state" noise, being generated by the breaking of waves, by the rolling of shingle, etc., – then since the generation of this noise is physically confined to the range of real angles, clearly the directivity factor or index would be expected to be an appropriate criterion of performance, and super-directivity would be expected to be an advantage. If on the other hand the dominant noise is that arising from thermal agitation in the dissipation resistance of the transducers forming the array together with the noise arising in the receiving amplifiiers (the significance of the latter was discussed in [3]), then the detection of signals against this background depends on the Noise Factor, and clearly super-directivity is a disadvantage. It should be remembered that a system where the basic limitation is noise from the medium can easily be changed to one where the limitation is resistance and amplifier noise by the use of super-directivity.

4. Extension of the principle to bearing-determining systems

In both references [1] and [3], some discussion was given of the design and performance of bearing-determining arrays whose directional pattern had a null at $x=0$, i. e. for signals arriving in a direction normal to the line of the array. The principle of super-directivity, interpreted as referring to directional patterns which have major peaks in the range of imaginary angles (i. e. in the range where $|\sin\theta|>1$), can also be applied to this kind of array, and it will be shown by means of an example that the same disadvantages arise.

In the previous papers, it was proposed that the signal/noise performance of bearing-determining arrays be measured as the ratio of the slope of the directional pattern through $x=0$ to the background noise. Assuming that multiplying systems are excluded from consideration (these were fully discussed in [3]), a good array arangement for bearing determination was shown to be that with "sine taper", having the directional pattern

---

[4] It should be noted that Pritchard [5] has given a hint of this in his statement, "However, it is possible that applications (of super-directive arrays) may exist in the field of acoustics, especially where the limiting noise in a receiving system is ambient noise in the medium rather than the limiting thermal noise in the transducers".

[5] These noise voltages are always uncorrelated as far as thermal-agitation noise in the dissipation resistance of the transducers is concerned; but this may not be so for noise arising in the medium, since if the sections of the array are very closely spaced, as in super-directive arrays, there is bound to be some correlation, even if the noise is uniformly distributed in space.

$$D_1 = \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x+\frac{\pi}{2}}.$$

The slope of this pattern at $x=0$ is easily seen to be $8/\pi^2$. This gives a Noise Factor of -1.2 dB (the reference array being the standard "split-beam" array).

A super-directive array, say of length λ, can be arranged to have the same slope at $x=0$. An example of a suitable basis of design is shown in Fig. 4. Two deflected patterns with peaks at $+2\pi$ and -2π on the x-scale, and with peak amplitudes of $-8/\pi$ and $+8/\pi$ respectively, are added, and the resultant pattern

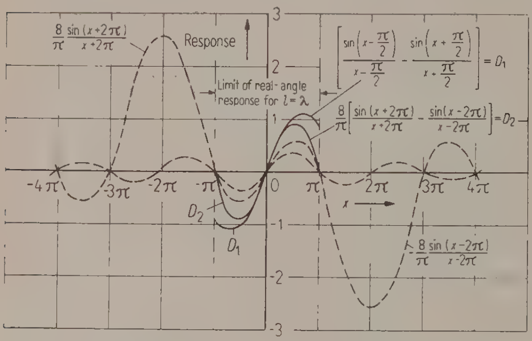


Fig. 4. The principle of super-directivity applied to a bearing-determining array.

$$D_2 = \frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin(x+2\pi)}{x+2\pi} - \frac{\sin(x-2\pi)}{x-2\pi}\right]$$

is easily shown to have the same slope through $x=0$ as the pattern D_1. The response in the range of real angles is made up entirely of the secondary lobes of the component patterns.

It can be seen by inspection of the resultant pattern, shown in Fig. 4, in which the real-angle response of D_1 is also shown, that as far as noise from real space is concerned, the super-directive pattern D_2 is superior to D_1, the improvement being rather less than 3 dB. But, when noise from the dissipation resistance and input circuits is considered, it is seen that the Noise Factor is worse by a ratio of $8/\pi$, i. e. by 8.1 dB. Thus the use of super-directivity has the same objections in a bearing-determining system as in a beam-forming system.

5. Conclusions

In receiving arrays of super-directive type the directivity index can only be a significant measure of performance if the limiting factor is the noise arising from distant sources in the medium. When performance is dominated by the noise from the dissipation resistance of the transducers or from the receiving amplifiers, then the super-directive array is inferior to the ordinary array. The best Noise Factor that can be obtained is that of the plain array with uniform sensitivity.

(Received March 21st. 1957.)

List of Symbols

$x = \frac{l\pi}{\lambda}\sin\theta$,

θ physical angle of any direction relative to the normal to the face of the array,

l length of array,

λ wavelength.

References

[1] Tucker, D. G., Some aspects of the design of strip arrays. Acustica **6** [1956], 403.

[2] Tucker, D. G., The randomization of combinations of noise sources by means of delay lines. Acustica **7** [1957], 399.

[3] Tucker, D. G., The signal/noise performance of electro-acoustic strip arrays. Acustica **8** [1958], 53.

[4] Woodward, P. M. and Lawson, J. D., The theoretical precision with which a radiation pattern may be obtained from a source of finite size. Proc. Inst. Elect. Engrs. (III) **95** [1948], 361.

[5] Pritchard, R. L., Optimum directivity patterns for linear point arrays. J. acoust. Soc. Amer. **25** [1953], 879.

[6] Pritchard, R. L., Maximum directivity index of a linear point arrays. J. acoust. Soc. Amer. **26** [1954], 1034.

SOUND ABSORPTION OF A STONE WALL

by E. J. Evans * and P. H. Parkin **

Summary

A Hollington stone wall at one time proposed for use in the new Coventry Cathedral was required to have an absorption coefficient of at least 0.2 between 250 and 1 000 c/s. The absorption coefficient of the stone itself was less than 0.05 at all frequencies. The necessary absorption was obtained by leaving 2.5 cm gaps between the vertical faces of the stone blocks, these acting as resonators. They were filled with glass-wool and varied in depth to give the required broadband absorption.

Sommaire

On a demandé qu'un mur en pierre de Hollington pour la nouvelle cathédrale de Coventry ait un coefficient d'absorption d'au moins 0,2 entre 250 et 1000 Hz. Or, le coefficient d'absorption de la pierre elle-même était inférieur à 0,05 pour toutes les fréquences. La valeur demandée de l'absorption a alors été obtenue en laissant des intervalles de 2,5 cm entre les faces verticales des blocs de pierre, ces intervalles agissant comme des résonateurs. On les a remplis de laine de verre et leur a donné différentes profondeurs pour obtenir la largeur voulue de la bande d'absorption.

Zusammenfassung

Die seinerzeit für die neue Kathedrale in Coventry vorgeschlagenen Wände aus Hollington-Stein müssen mindestens einen Absorptionskoeffizienten von 0,2 im Bereich 250 bis 1000 Hz haben. Der Absorptionskoeffizient des Steines selbst ist bei allen Frequenzen geringer als 0,05. Die erforderliche Absorption wird durch 2,5 cm breite Spalten zwischen den Steinen, welche als Resonatoren wirken, erzielt. Sie sind mit Glaswolle gefüllt und in unterschiedlicher Tiefe ausgeführt, um die nötige Bandbreite zu erzielen.

At an early stage of the design of Coventry Cathedral now being built in England, the internal wall surfaces were to be of stone. This has now been changed, but the sound absorption treatment that was devised for the stone may be of general interest.

The absorption coefficient of the wall had to be at least 0.2 over the medium frequency range (about 250 to 1 000 c/s) decreasing to 0.1 at lower and higher frequencies. The wall consisted of blocks of Hollington stone, (a fairly fine-grained, porous, triassic sandstone of moderate to low hardness), all the blocks being of the same depth (18.5 cm), but varying in width at random between 20 cm and 100 cm, and in height between 15 cm and 40 cm; the stone was to form a facing only, with a solid backing. The solution adopted was to leave 2.5 cm wide vertical openings between each block. Half of these slots went back the full depth (18.5 cm) of the blocks; the other half were filled in solid from the back to half the depth. All slots were filled nearly to the surface with glass-wool.

The absorption coefficients were measured in the reverberation chamber of the National Physical Laboratory (volume about 275 m^3). The specimen wall 3.1 m × 3.1 m was laid on the floor. The "vertical" joints were left open as described; the horizontal joints were made with mortar in the usual manner. The ends of the "vertical" joints at the edges were sealed. The total number of vertical joints was 78, i. e. about one per 0.12 square metre.

The absorption coefficients obtained are given in the Table, which also includes the results of two preliminary tests which provided the basis for the final design.

The data in the Table refer to the following treatments:

1. All slots 18.5 cm deep. Slots empty.
2. All slots 18.5 cm deep. Slots filled with glass-wool.
3. One half slots 18.5 cm deep. Other half 9.3 cm deep. Slots filled with glass wool.

The absorption coefficients of the stone wall with all the joints closed were less than 0.05 at all frequencies.

The results indicate that the slots act as resonator absorbers. Maximum absorption occurs when the depth is approximately an odd multiple of a quarter wave length, and the frequencies correspond to those of a stopped organ pipe of length approximately equal to the slot depth. For example, the empty slots show absorption maxima at 400 c/s and 1 200 c/s, with a minimum at about 800 c/s. These frequencies correspond to the resonance and anti-resonance frequencies of a stopped pipe 21.5 cm long, i. e. the

---

* National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex.

** Department of Scientific and Industrial Research, Building Research Station, Garston, Watford, Herts.

Table I

Mean frequency (c/s)	Reverberation absorption coefficient (to nearest 0.05)		
	Treatment		
	1	2	3
125	0.10	0.15	0.10
160	0.10	0.15	0.10
200	0.15	0.15	0.15
250	0.10	0.20	0.20
320	0.30	0.35	0.25
400	0.50	0.30	0.25
500	0.20	0.20	0.25
640	0.10	0.20	0.25
800	0.05	0.20	0.25
1000	0.05	0.25	0.25
1250	0.15	0.20	0.25
1600	0.10	0.20	0.20
2000	0.10	0.15	0.20
4000	0.15	0.15	0.15

depth of the slot plus an end correction of about 3 cm. The introduction of the absorbent in treatment 2 gives slightly lower frequencies and broader maxima. It is clear that the resonance frequencies can be controlled in a simple manner by variation of the slot depth, and in treatment 3 a combination of two depths was adopted to provide uniform absorption over a wide frequency range.

The present measurements show that the slot resonator forms a useful addition to the range of available acoustical treatments. In particular it appears to have application as a simple alternative to the Helmoltz resonator absorber.

Acknowledgments

This paper is published by permission of the architects for the Cathedral, Basil Spence A.R.A. and Partners, and of the Directors of the National Physical Laboratory and the Building Research Station.

(Received 6th August, 1957.)

MISCELLANEA

4. Tonmeistertagung in Detmold

Die vierte dieser schon Tradition gewordenen Tagungen fand im Einverständnis mit der ICA vom 22. bis 25. Oktober 1957 an der Nordwestdeutschen Musik-Akademie statt (Leitung E. Thienhaus). Fast 200 musikalische und technische Fachleute, u. a. aus acht außerdeutschen Ländern, waren zusammengekommen zu Referaten, Vorführungen und gemeinsamen Diskussionen über künstlerische und technische Probleme der Musikaufnahme und -wiedergabe, insbesondere über die Fortschritte der stereophonischen Übertragung. Hervorgehoben seien folgende Themen:

Die geistige Welt des Musikinstrumens (L. Jung), Glockenspiele und Glockenspielmusik in den USA. (Percival Price), Neuentwicklung in der räumlichen Schallwiedergabe (N. V. Franssen), Über die Darstellung der Struktur ausgedehnter Schallquellen (F. Enkel), Versuch einer physikalischen Interpretation der künstlerischen Qualität musikalischer Klänge (E. Thienhaus), Musikalisch-akustische Kriterien von Konzertsälen (F. Winckel), Große Dirigenten — Randbemerkungen zum Problem der Begabung (H. P. Schmitz), Anwendung des MS-Stereophonieverfahrens zur Untersuchung raumakustischer Probleme (H. Lauridsen), Das stilisierte Realgeräusch in Hörspiel und Film (W. Hart und J. Aschenbrenner), Tonaufzeichnungsverfahren mit 1 bis 6 Kanälen (H. Fries), Künstlerische Probleme bei der Tonband-Musikaufnahme (J. Urbánski), Methoden der Musikaufnahme (P. Burkowitz), Stereophonie auf der Schallplatte (F. Schlegel), Über den Neubau der Musik-Akademie in Warschau und ihre elektroakustischen Einrichtungen (M. Rajewski).

Ein Tagungsbericht wird herausgegeben. Die nächste Tonmeistertagung ist für den Herbst 1960 in Detmold geplant.

H. Kösters

Akustischer Kongreß in Budapest

Vom 4. bis 8. November 1957 veranstaltete der Optische und Kinotechnische Verein in Budapest einen Kongreß, auf dem Themen aus dem Bereich der reinen und angewandten Akustik sowie der Meßtechnik behandelt wurden. Neben den Vorträgen wurden den Besuchern (ca. 100 aus Ungarn und 24 aus dem Ausland) mehrere Besichtigungen und eine Ausstellung von Meßgeräten geboten.

Der Kongreß wurde von T. Tarnóczy eröffnet, der in seinem einleitenden Vortrag über *die Bedeutung der akustischen Konferenzen* sprach.

I. P. Valkó, Budapest, machte mit der *Theorie des Kardioid-Mikrophons* bekannt. Mit Hilfe seiner Methode konnte er nicht nur die bisher bekannten Mikrophontypen systematisieren, sondern er wies auch auf Möglichkeiten der bis jetzt noch unbenützten Mikrophontypen hin.

J. Merhaut, Prag, sprach über *Intermodulationsverzerrungen in Lautsprechern.* Die objektive Qualitätsbeurteilung der Lautsprecher wird durch seine Meßmethode und seine Nomogramme sehr erleichtert.

F. Takács, Budapest, diskutierte in seinem zusammenfassenden Vortrag die *Folgerungsverzerrung der Schallplattenwiedergabe* und deren Zusammenhang mit der Spielzeit.

Der Vortrag von G. Wagner, Prag, über *analytische Methoden zur Lösung der mechanischen Schwingungssysteme* enthielt neue wertvolle Ergebnisse, die mit Hilfe der Kirchhoffschen Kombinationsregeln gewonnen wurden.

D. Huszty, Székesfehérvár, schlug als *Qualifikationsangabe von Lautsprechern* die in der Achse gemessene Schalldruckverteilung sowie die Messung der Gesamtenergie vor.

J. Kacprowski, Warschau, machte in seinem Vortrag *„Über die Möglichkeiten der Abbildung der akustischen Impedanz des menschlichen Ohres mittels einer Ersatzschaltung“* mit der Planung und Verfertigung eines neuen und für Normalisierungszwecke geeigneten künstlichen Ohres bekannt.

P. J. Honoré, Naerum, hielt einen zusammenfassenden Vortrag über *die Berechnung von Lautstärken.*

Verständlichkeitsuntersuchungen in Filmstudios bei unterschiedlicher Mikrophonaufstellung und verschiedenen Mikrophontypen wurden von F. Kemenes, Budapest, behandelt. Die Messungen wurden auch bei Sprachaufnahmen mit Begleitmusik und bei fertigen Filmen ausgeführt. Interessant ist die Bestimmung des Intelligenzfaktors der Logatomverständlichkeit.

W. Jassem, Warschau, sprach über *das Durchschnittsspektrum der polnischen Sprache* und verglich die Ergebnisse mit den bei anderen Sprachen erhaltenen Durchschnittsspektren. Die Beachtung der statistischen Lautverteilung kann in seinem Untersuchungsverfahren als neu betrachtet werden.

E. Magyari, Budapest, berichtete über seine Untersuchungen, die er im Zusammenhang mit der *elektroakustischen Regelung des Nachhalls* ausführte. Er hat nachgewiesen, daß die auf der elektrischen Seite gedämpften Lautsprecher einen Schluckgrad $\alpha = 45$ bis 75% (abhängig von der Frequenz und dem Belastungswiderstand) haben.

M. Kwiek, Posen, bot eine schöne Zusammenfassung über die Zusammenhänge zwischen den *raumakustischen physikalischen Charakteristiken und den subjektiven musikalischen Empfindungseigenschaften.* Bei einem Testkonzert wurden verschiedene akustische Eigenschaften künstlich verändert. Die bisher erhaltenen Ergebnisse, über die vorgetragen wurde, beweisen die Brauchbarkeit der Methode.

T. Tarnóczy, Budapest, hielt einen Vortrag mit dem Titel *„Planung und Untersuchung von Hallräumen kleinerer Abmessungen“.* Er wies nach, daß man in einem geeignet ausgebildeten und nicht mit steifen Wänden begrenzten $10\,\mathrm{m}^3$ großen Raum sowohl vom Gesichtspunkt der Nachhallcharakteristik und der Energieverteilung, als auch der Frequenzirregularität mit den großen Sälen gleichwertige Hallräume verfertigen kann. Ein weiterer Vorteil dieser Konstruktion besteht darin, daß sich die Nachhallzeit für tiefe Töne nicht erhöht. Es ist interessant, daß in diesem Raum nicht der von Schröder gefundene Zusammenhang zwischen der Frequenzirregularität und der Nachhallzeit von $F_\nu = 1{,}4\,T$, sondern eine Beziehung $F_\nu \approx T$ zu messen ist.

P. V. Brüel, Naerum, machte in seinem Vortrag über *zeitgemäße raumakustische Messungen* mit den Aufnahmen der Somervilleschen Kurvenscharen und den damit zusammenhängenden Auswertungsmöglichkeiten bekannt.

Frau M. Lukács, Budapest, untersuchte den *inneren Geräuschpegel von Autobussen* und parallel damit den *Gehörverlust der Autobusführer.* Es ergab sich ein interessanter Vergleich zwischen dem von den verschiedenen Autobussen erzeugten Lärm und dem Gehörverlust der Autobusführer. Neu scheint die Erkenntnis, daß die Autobusführer nicht auf ihrem rechten Ohr, auf der Motorseite, sondern auf ihrem linken Ohr, auf der Fensterseite, einen größeren Gehörverlust erleiden.

A. Freund, Wien, sprach über die *elektroakustischen Einrichtungen der Bundestheater in Wien.*

P. Greguss, Budapest, zeigte eine Hochfrequenz-Filmaufnahme über die *in Flüssigkeiten erzeugten Stoßwellen.*

P. V. Brüel, Naerum, behandelte in seinem Vortrag die *Methoden der Schallanalyse bei Geräuschen in der Industrie* und die aus den Messungen ableitbaren Folgerungen.

W. Erler, Dresden, gab eine Zusammenfassung über *die Theorie und die Meßergebnisse der Nebenweg-Schallübertragung zwischen Räumen.* Sein Vortrag bot eine gute Übersicht über die neuesten Ergebnisse, die auf diesem Gebiet an verschiedenen deutschen Forschungsinstituten gewonnen wurden.

G. Heckenast, Budapest, machte mit einem *neuen Studio-Magnettongerät für zwei Geschwindigkeiten* bekannt, welches vom ungarischen Rundfunk entwickelt wurde.

E. Vogl, Lahr (Baden), trug über *neue elektroakustische Meßgeräte der Elektromeßtechnik* vor und behandelte ein Magnetophon mit veränderlicher Geschwindigkeit und die Kuhlsche Nachhallplatte.

Die Konferenz wurde mit einer *Zusammenfassung* von I. Barta geschlossen.

T. Tarnóczy

Société Internationale d'Audiologie
IV$^{\text{e}}$ Congrès, Padova (Italia), 2–5 octobre 1958

Les Secrétaires généraux (Dr. Clerc et Dr. Trenque) de la Société Internationale d'Audiologie, nous font savoir que cette Société tiendra son IVe Congrès à Padova (Italia), les 2-3-4-5 octobre 1958. Cette très importante réunion sera réservée aux audiologistes s'intéressant particulièrement aux progrès de cette spécialité. Trois «Tables Rondes» sont prévues sur les sujets suivants: «Prothèse auditive»; «Traumatismes sonores»; «Interdépendance cochléaire».

Toute correspondance pour ce congrès est à adresser au
Secrétaire général du IVe Congrès de la Société Internationale d'Audiologie,
Prof. Arslan,
Clinique O.R.L. Universitaire,
Padova, Italia.

Par ailleurs, c'est au printemps 1960, que se tiendra à Basel (Confédération helvétique), le Ve Congrès de cette Société.

3. Internationaler Akustischer Kongreß Stuttgart 1959

Der 3. Internationale Kongreß für Akustik findet in der Zeit vom 1. 9 bis 8. 9. 1959 in Stuttgart (Deutschland) statt. Der Kongreß wird auf Veranlassung der International Commission on Acoustics gemäß den Beschlüssen des 2. Kongresses 1956 (Cambridge) veranstaltet und vom Verband Deutscher Physikalischer Gesellschaften gemeinsam mit der Nachrichtentechnischen Gesellschaft des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und gemeinsam mit dem Verein Deutscher Ingenieure durchgeführt.

Die Sitzungen werden in der Stuttgarter Liederhalle und in der Technischen Hochschule stattfinden.

Das Vortragsprogramm soll Themen aus dem gesamten Bereich der physikalischen und technischen Akustik umfassen, vorwiegend über: Lärm- und Schwingungsabwehr, Elektroakustik und Raumakustik sowie physikalische Akustik.

Zusammenfassende Vorträge sind in Aussicht genommen aus folgenden Gebieten: Akustische Methoden in der Festkörperphysik — Schallausbreitung in Gasen bei kleinen Drucken — Turbulenz und Schall — Kavitation — Strukturforschung mit Ultraschall — Physiologische Akustik — Psychologische Akustik — Stereophonie — Raumakustik — Bauakustik — Geräuschbekämpfung — Informationstheorie — Sprache.

Das Rahmenprogramm wird eine Fahrt nach München einschließen mit der Möglichkeit, industrielle Forschungsstätten und kulturelle Sehenswürdigkeiten zu besichtigen, ferner Ausflugsfahrten in die weitere Umgebung Stuttgarts (Schwarzwald, Bodensee).

Eine Ausstellung zeigt moderne akustische und elektrische Meßgeräte der Industrie.

Ausländische Besucher, insbesondere solche aus Übersee, werden die Möglichkeit haben, vor oder nach dem Kongreß deutsche Forschungsstätten zu besichtigen.

Weitere Ankündigungen über den Kongreß werden folgen, sobald die Einzelheiten festliegen. Interessenten werden schon jetzt gebeten, dem Sekretär der Tagung, Herrn Dr.-Ing. Eberhard Zwicker, Stuttgart-N, Breitscheidstraße 3, ihre Adresse mitzuteilen, damit ihnen alle weiteren Nachrichten persönlich zugesandt werden können. — Anmeldung von Einzelvorträgen, die bis zum 15. Mai 1959 entgegengenommen werden, sind zu gegebener Zeit an die gleiche Adresse zu richten.

BOOKREVIEWS

E. G. Richardson, Technical aspects of sound, Vol. 2. Elsevier Publishing Co., Amsterdam 1957, 410 pages, 206 figs, 23 cm × 16 cm, sh 70/—.

The volume 2, edited by E. G. Richardson, is the second volume of three.

The contributors to this volume are respectively

1. H. H. Hubbard, Langley Aeronautical Laboratory (U.S.A.),
2. L. W. Lassiter from the same Laboratory,
3. E. Meyer, III. Physikalisches Institut, University of Göttingen (Germany).
4. B. E. Noltingk, Tube Investments Research Laboratories, Cambridge (England),
5. H. Oberst, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig (Germany),
6. A. A. Regier, Langley Aeronautical Laboratory (U.S.A.),
7. E. G. Richardson, King's College, University of Durham (England),
8. K. Tamm, III. Physikalisches Institut, University of Göttingen (Germany).
9. N. B. Terry, National Coal Board, Mining Research Establishment, Isleworth (England).

These different contributors have been chosen each as a specialist in his own field.

The book has been divided in four parts. The first chapter has been written by Richardson himself with the subject: Propagation of sound in the atmosphere and the sea. Thereafter follow three divisions:

Division I: Ultrasonic transducers and applications, written by B. E. Noltingk and N. B. Terry.

Division II: Underwater acoustics. This chapter is divided in four parts:

1. Technique of measurements and apparatus,
2. Air bubbles in water, written both by E. Meyer,
3. Broad-band absorbers for water-borne sound, by K. Tamm,
4. Resonant sound-absorbers, by H. Oberst.

Division III: Aircraft noise and underwater propulsion noise, divided in four chapters:

1. Propeller noise, by A. A. Regier, H. H. Hubbard and L. W. Lassiter,
2. Jet noise, by the same authors,
3. Other sources of aircraft noise and comparative noise levels, also by the same authors,
4. Sounds of propulsion in water, by E. G. Richardson.

As we can see from the content of this book, it is an assembly of subjects on which practically no books have been written up to-date. Richardson was fortunate that he was able to group a such excellent group of contributors.

The book contains 407 pages and has been printed in a nice form. It is richly illustrated and it contains a large number of references on the different subjects.

It is a book which gives a lot of information on the different recent problems in technical acoustics. It will certainly be in its right place in every laboratory on acoustics.

A. van Itterbeek

E. G. Richardson, Relaxation spectrometry. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1957, 140 pages, 88 figs, 15 cm × 23 cm, sh 40/—.

E. G. Richardson is an active bookwriter. While in his earlier books, he treated essentially problems on pure acoustics and ultrasonics in his recent book he discusses new problems. The subject of the book is connected with the problem of relaxation phenomena in general which appear during elastic deformations in solids, liquids, gases and plastic substances. Acoustic relaxation problems are included. But at the end of the book in chapter VII the author discusses dielectric relaxation phenomena.

Richardson treats systematically the different phenomena and new fields of investigations which began to appear in the literature during the past years. At the end of each chapter an extended list of references of the newest literature is indicated. Richardson's book is devided into eight chapters. In the first chapter the author introduces the notion of relaxation on the basis of different mechanical models. In the second chapter the relaxation phenomena are treated theoretically with the use of electromagnetic models. In chapter III are discussed the infrasonic properties of solids, together with the experimental methods. Chapter IV contains a description of the acoustic properties of solids (metals) in connection with internal friction. Chapter V is a discussion of the ultrasonic relaxation phenomena in gases and liquids and finally in chapter VI is treated the absorption in metals in connection with the experiments of Truell, Mackinnon, Mason etc.

Finally it can be said the book has been edited in an agreeable form and it can certainly help young investigators who wish to start in this new field of research.

A. van Itterbeek